

AUTOMAATJUHTIMISSÜSTEEMID

Õppeabimaterjal

ver 1.0a okt.2009

Andres Rähni

Sisukord

Sissejuhatus.....	3
1 Automaatjuhtimissüsteemide üldine struktuur ja liigitus	5
1.1 Mõisted, eesmärgid, komponendid	5
1.2 Digitaalne AJS.....	7
2 Dünaamiliste süsteemide matemaatiline kirjeldamine.....	9
2.1 Matemaatilised alused: mudelid, teisendused	10
2.1.1 Diferentsiaalvõrrandid, olekuvõrrandid	10
2.1.2 Diferentsvõrrandid	14
2.1.3 Laplace'i teisendus, z-teisendus ja kompleksmuutujafunktsioonid	16
2.1.4 Ülekandemudel, ülekandefunktsioon, olekumudel.....	16
2.1.5 Mudelite esitus MATLAB-is	21
2.2 Modelleerimine	23
2.2.1 Süsteemivõrrandite kirjutamine	23
2.2.2 Dünaamilise süsteemi simuleerimine MATLAB/Simulik-is.....	25
2.2.3 Alalisvoolumootori mudeli näide	26
3 Süsteemide analüüs	30
3.1 Siirde ja püsioleku omadused.....	30
3.2 Juhitavus, jälgitavus	37
3.3 Analüüs Matlabis ja diskreetimissammu valik.....	37
4 Automaatjuhtimissüsteemide sünteesimeetodid	39
4.1 Klassikalised meetodid (SISO)	39
4.2 Süntees olekuruumis	40
4.2.1 Modaaljuhtimise süntees.....	44
4.2.2 Olekuregulaatori modaalne süntees antenni mudeli näitel	47
4.2.3 Lineaarsete süsteemide optimaaljuhtimine	49
4.2.4 Järgivsüsteemi optimaalne süntees mootori mudeli näitel.....	51
Kasutatud kirjandus	57
LISA 1 Termilise objekti mudeli simulatsiooniskeemid ja tulemused.....	58
LISA 2 Automaatjuhtimise baassõnastik ver. 1.03.....	61
LISA 3 Matlabi käsufailid	65

Sissejuhatus

Automaatse, inimese osavõtuta juhtimistehnika juured algavad tehnikarevolutsiooni aegadest (nt. J.Watt aurumasina reguleerorgan). Juhtimistehnika juurdumine (automatiseerimine) võimaldas areneda paljudel teistel olulistel tehnikaaladel nagu näiteks tootmine, transport, side, energeetika jt. Tänapäeva tehnikat ei kujutagi ilma automaatjuhtimiseta ette. Automaatjuhtimist ja seda realiseerivate süsteemide õpetamist on Tallinna Tehnikaülikoolis läbiviidud möödunud sajandi teisest poolest alates. Praeguseks automaatikainstituudis väljakujunenud õppekava ja –ained moodustavad terviku baasaluse automaatjuhtimise vallas tippu välja jõuda, kuid paigutab enamus automaatikaga seotud aineid magistriõpingutesse. Antud töö esitab teoreetilised alused bakalaureuse kursuse automaatjuhtimissüsteemid (AJS) jaoks, mida võib lugeda esmaseks sissejuhatuseks kogu automaatika valdkonda, kuigi siht on matemaatiliselt keerukamatel sünteesi meetoditel. Seletuskirja eesmärgiks on moodustada minimaalne õppematerjal kogu kursuse sisust, pakkudes juhatus edasiste ja konkreetsetelt süviti minevatele teemadele. Kursuse väljakujunenud õppekirjandus on ülemaailmselt üsna traditsiooniline [(1), (2), (3)], kuid selle kasutamine on õppurite seas pigem erand, kui reegel. Seepärast on kujunenud vajadus koostada riigikeelne põhimaterjal, mis vajadusel täpsustamist vajavaid teemasid edasi suunab. Mõned varajasemad eestikeelsed väljaanded (vt. kasutatud kirjandus), ei kata kogu sellise kursuse temaatikat ja/või ei suuna piisavalt täiendavale edasilugemisele.

Kuigi TTÜ raamatukogus on olemas enamus rahvusvaheliselt tunnustatud (hinnatud) automaatjuhtimise teooria õpikute eksemplareid, on paljud neist ilmunud eelmisel sajandi lõpul või sajandivahetusel ja uuemaid trükke pole antud töö kirjutamise ajaks tellitud. Muidugi alati ei ole uuemas trükis traditsioonilised teooria osad oluliselt muutunud ja enamus AJS kursuse osasid saab ilusti ka vanema trüki peal õpetada. Reeglina sisaldavad need õpikud alguse peatükkides ka süsteemiteooria aluseid (mudelite esituskujud, Laplace'i teisendus jm), mida TTÜ infotehnoloogia teaduskonnas lausa eraldi õppeainena õpetatakse. Eeldades sellise eeldusaine olemasolu on TTÜ automaatjuhtimissüsteemide kursus erinev põhiõpikutes pakutud kursuse ülesehitustest. On autoreid ja hinnangute andjaid, kes on tunnistanud, et nt Laplace'i teisenduse kasutamise tavalise lühida sissejuhatuses võib jääda veidi puudulikuks. Samas on see klassikaliste meetodite puhul hädavajalik alus. Kuigi valdavalt loetakse klassikalise automaatjuhtimise sünteesi osade kuulumine sellisesse kursusesse obligatoorseks, leidub ka soovitusi, kus piirdatakse vaid kaasaegsete sünteesimeetoditega. Klassikaliste analüüsi- ja sünteesiprotseduuride tähtsuse vähenemise põhjuseks saab lugeda ka selle, et tänapäeval pole ühe sisendi ja väljundiga süsteemide tööle häälestamisega enam suurt vaeva. Käesoleva kursuse materjali ülesehitus on eelkõige suunatud kaasaegsete meetodite selgitamisele ja klassikalistest sünteesi protseduuridest tuuakse vaid kerge ülevaade.

Vähesed kaasaegsed automaatjuhtimise õpikud toovad näiteid MATLAB-i üldse kasutamata. Paljude õpikutega kaasnevad autorite poolt koostatud MATLAB-i käsufailide ja simulatsiooniskeemide pakettid, mida saab allalaadida kirjastuste kaudu või MATLAB-i tootja MathWorks-i kodulehel oleva File Exchange of MATLAB Central keskkonna kaudu <http://www.mathworks.com/matlabcentral>. Selline MATLAB-iga lahendamisele orienteeritus on võetud aluseks ka antud materjali puhul.

Seletuskirja moodustavad samasugused osad, nagu tavaliselt automaatjuhtimise õpikutes kohata võib. Esimeses osas antakse ülevaade automaatjuhtimise peamistest mõistetest ja nende süsteemide üldisest ülesehitusest. Teine osa teeb kokkuvõtte

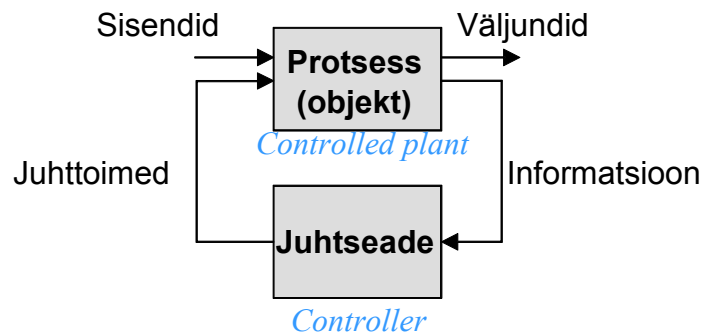
süsteemide esituse mudelite kujudest ja lihtsamatest mudelite koostamise võimalustest. Kolmas osa on pühendatus selliste süsteemide analüüsi küsimustele, mis on olulised automaatjuhtimisega süsteemi loomise mitmel etapil. Neljas osa on kursuse põhimaterjali kohta, milleks on peamised sünteesimeetodid.

1 Automaatjuhtimissüsteemide üldine struktuur ja liigitus

1.1 Mõisted, eesmärgid, komponendid

Automaatjuhtimise üldine eesmärk on inimese otsese osavõtuta tagada juhtiva seadme (juhtseadme) toimete (juhttoimete) abil mingite juhitavate muutujate soovitud käitumine. Juhitavateks muutujateks on tavaliselt juhitava protsessi mingid olulised füüsikalised muutujad (nt temperatuur, asend, kiirus, materjali kogus, sisaldus, rõhk jne.). Nendele esitakse tehnilise süsteemi soovitud toimimiseks teatud nõuded. Üldise eesmärgi all saab täpsustada veel tulemusi, mida automaatjuhtimise rakendamisega soovitakse saavutada. Nendeks on nt tehnilise süsteemi keskkonnale, inimestele ja süsteemi seadmetele enesele ohutu toimimine, tehnilise süsteemi suurem täpsus, efektiivsus (nt ressursside säästlikkus) või tootlikkus. Leidub ka tehnilisi süsteeme, mis ilma automaatjuhtimiseta ei ole üldse võimelised toimima ja teisi, mis toimivad ilma oluliselt kehvemini. Tihti asendab automaatjuhtimine varem inimese poolt tehtud käsijuhtimise toiminguid.

Juhtseadet ja juhitavat protsessi koos võib nimetada automaatjuhtimissüsteemiks (vt. Joonis 1.1). Nagu iga süsteem, omab juhtimissüsteem sisendeid, väljundeid ja sisest tegevust, millega sisenditest väljundeid teisendatakse. Automaatjuhtimise seisukohast on tähtsam siinkohal juhtseadmes töötav algoritm, mis kasutades protsessist saadud informatsiooni määrab (arvutab) vajalikud juhttoimed protsessi toimimise hoidmiseks soovitud käitumise lähedal. Juhtseade on tänapäeval reeglina arvuti või arvutilaadne seade (programmeeritav loogikakontroller, mikroprotsessor, mikrokontroller vms.). Kui juhitava protsessi sisu on midagi lihtsat, nimetatakse seda tihti lihtsalt juhitavaks objektiks.



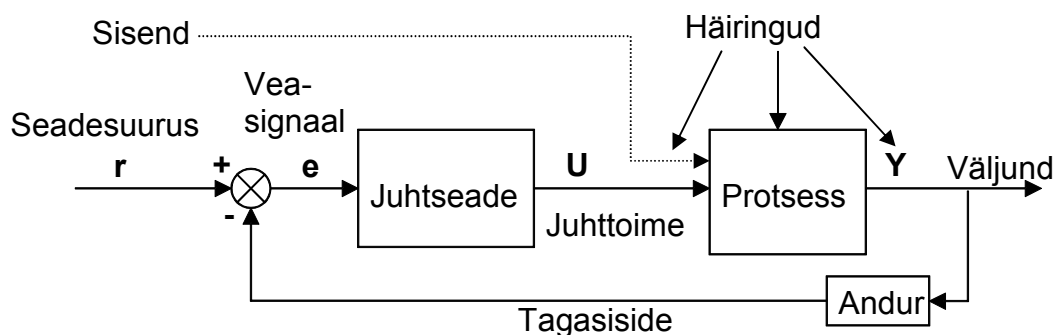
Joonis 1.1 Üldistatud automaatjuhtimissüsteem

Juhitavad protsessid võivad olla väga erinevatest valdkondadest. Automaatjuhtimine leiab aset väga paljudes tehnika valdkondades; tööstusprotsessides, telekommunikatsioonis, robotitehnikas, kosmose-, õhu-, maa- ja veesõidukites ning nende liikluse korralduses, hoonete tehnosüsteemides, kodutehnikas, militaartehtnikas ja mitmel pool mujal. Samas on automaatjuhtimise põhialustega analüüsitavad ka muud nt. sotsiaalsed protsessid.

Lisaks automaatjuhtimisele eristatakse ka automaatkontrolli, mille puhul mõjutus protsessile on midagi lihtsamat (nt automaatne kaitseahelate lülitumine ebanormaalse olukordade vältimiseks, erandolukorra signalisatsioon) või puudub üldse (automaatne mõõtmine, registreerimine, seire).

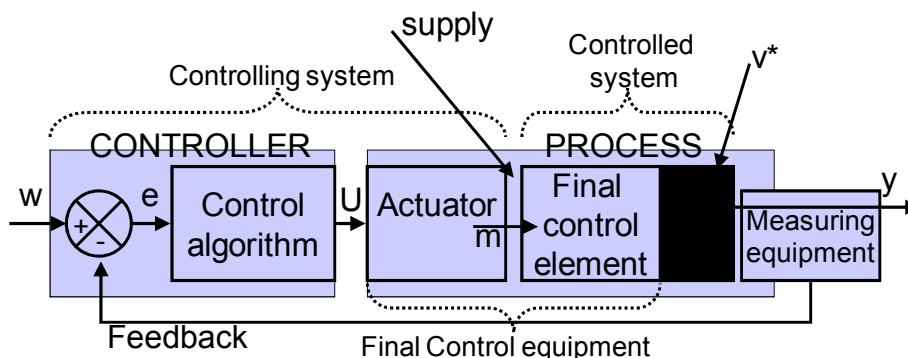
Automaatjuhtimisega süsteeme saab liigitada mitmeti. Struktuurse ülesehituse järgi jaotatakse neid üldiselt kaheks; avatud ja tagasisidestatud struktuuriga süsteemideks. Veel saab eristada teooria seisukohast pideva ja diskreetse toimega

süsteeme, kuigi praktiliselt realiseeritakse juhtalgoritm tänapäeval digitaalseadmete peal (vt p 1.2). Võib veel eristada toimekauguse järgi st kas juhtseade on juhitava objektile lähedal (lokaalautomaatika) või vastupidi kaugel (distsants- ja kaugjuhtimisega süsteemid), mille puhul oluliseks muutuvad ka andmete edastuse probleemid. Kui kujutada juhtseade ja protsess skeemil horisontaalselt (vt Joonis 1.2), saame tagasisidestatud süsteemi tavapärasema esituse. Informatsiooni, mida juhtseadme algoritm kasutab, mõõdab (teatud täpsuse ja veaga) andur. Reeglina on suurem osa mõõdetavatest muutujatest need, mida on vaja süsteemi õigeks käitumiseks juhtida (juhitav muutuja Y). Juhtseade võrdleb saadud informatsiooni nõutud väärtustega ja korrigeerib juhttoime (U) kaudu protsessi tööd, kui vaja. Lihtsamal juhul tehakse võrdlus nõutud väärtuse (seadesuurus) ja tegeliku väärtuse lahutamise, ning saadakse veasignaali (e). Sellisel juhul kasutab algoritm juhttoime arvutamiseks ainult veasignaali ning juhtseadet nimetatakse tihti regulaatoriks.



Joonis 1.2 Tagasisidestatud automaatjuhtimissüsteem

Protsessi sisendit toodud skeemil võib võtta juhttoime kõrval, kui elementaarset ressursi (energia, materjali sisendvoog vms) ilma milleta protsessi teisendus ei ole võimalik, kuid juhttoimeks ei pruugita teda ilmutatult kasutada. Juhttoime on informatiivne signaal seadmetele (**täiturseade, reguleeriv organ**), mis protsessi sees seda reaalseks mõjutuseks muundades ja võimendades protsessi toimimist muuta suudavad. Selliste seadmete olemasolu automaatjuhtimissüsteemis väljendab ka Joonis 1.3, kus ingliskeelse kirjanduse pruukimise hõlbustamiseks on toodud automaatjuhtimissüsteemi rahvusvaheliselt levinud põhiterminid.



w - reference (desired) value* (also *setpoint*)

e - error signal*, $e = w - \hat{y}$

U - control signal (low power, information)

m - manipulated variable*

y - controlled variable (actual value)*

* - IEC chief symbol

Joonis 1.3 Automaatjuhtimissüsteemi põhiterminid (IEC soovitusena)

Samasuguseid lühendmärgendeid (e, U, Y) kasutatakse antud materjalis läbivalt. Mitmete teiste terminite tõlkimiseks saab kasutada eesti-inglise-vene lühisõnastikku antud materjali lisas 2 või allikat [(4)].

Eelpool joonistel toodud häiringud (V) on tavaline ebasoovitav nähtus protsesside reaalse toimimise käigus. Häiringuteks, mis kõik mõjutavad protsessi tavalist käitumist, võivad olla väliskeskkonna omaduste muutumine, sisendressursside kõrvalekalle tavalisest jpm. Nende mõju kajastub juhitavates väljundites ja jõuab tagasiside tõttu veasignaali koosseisus juhtalgoritmini ning kompenseeritakse juhttoime muutmise abil. Kahjuks ei saa juhtalgoritm alati aru juhitavaid väljundeid mõõtvate andurite häiretest, sest nende poolt edastatavat infot tõlgendatakse lihtsamal juhul täiendava kontrollita õigeks. Näiteks võib häiringuks olla välistemperatuuri muutus sisetemperatuuri juhtimisel, tuule mõju suundantenni või radari keeramisel soovitud suunas, seadmete toitepingete kõikumine või siseneva materjalivoo (nt vesi) hulga vähenemine, väljundeid hindavate mõõteseadmete ebatäpsuse suurenemine jms. Ka mitmel mittetehnilistel süsteemidel (kooslustel) on tagasiside vajalik.

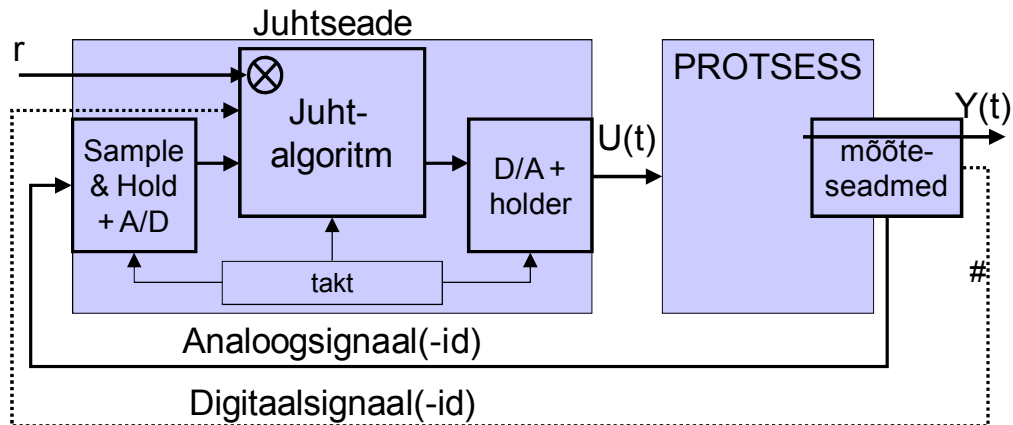
Juhitavad protsessid ei ole tavaliselt lõpmatult püsivate omadustega. Protsessi käitumine võib muutuda ümbritseva keskkonna tingimuste ja ajaliste muutuste ning kirjelduse ebatäpsuste tõttu. Avatud struktuuriga süsteemi puhul selliste muutuste mõju tagasiside puudumise tõttu ei avastata ja automaatjuhtumissüsteemi töötamine võib soovitud käitumisest kõrvale kalduda. Selle vältimiseks saab täiendada juhtimisalgoritmi nii, et see oskaks peamisi (oluliselt mõjutavaid) häiringuid mõõta ja arvestada. Sellise võime realiseerimise nimetatakse otsesideks.

Mõned lihtsamad ühe muutuja juhtimisalgoritmid ei vajagi erilist teoreetilist ettevalmistust ja on mõistetavad niisama. Näiteks „Sisse/Välja“ lülitamisega nn kahepositsiooniline algoritm, lülitab vajaliku mõjutuse protsessile (nt. kütmine, vedeliku sissevool vms.) „sisse“, kui juhitav muutuja on liiga väiksel (või suurel) väärtusel ja vastupidi „välja“, kui on jõudnud teise äärmusesse. Sellise lihtsa toime näiteks võib vaadata teatud ruumi sisetemperatuuri juhtimist (hoidmist, stabiliseerimist) soovitud taseme juures. Mõjuvate väliskeskkonna temperatuuri häiringute jahutava mõju kõrvaldamiseks lülitab kahepositsiooniline regulaator elektrilist küttekeha sisse ja välja (vt simulatsiooniga saadud käitumise graafikuid Lisas 1) nagu koduse elektriradiaatori termostaat.

Kuigi eelpool joonistel on sõnastused ainsuses, on komplektsetel süsteemidel reaalset mitmeid juhitavaid muutujaid ja juhttoimeid, mis võivad olla vastastikku keerukalt seotud.

1.2 Digitaalne AJS

Arvuti ja arvutilaadsed (digitaal-) seadmed on tänapäeval peamine vahend juhtimisalgoritmi odavaks ja paindlikuks realiseerimiseks. Arvutitarkvaras, digitaalses signaaliprotsessoris (DSP), mikrokontrolleris või programmeeritavas loogika-kontrolleris (PLC) realiseeritud algoritmi on lihtne arendada ja muuta. Digitaalseadme riistvaralise lahenduse saab disainida suhteliselt universaalseks, nii et see sobib mitmesuguste erinevate juhtimisülesannete jaoks kasutamiseks, ning muuta on vaja vaid tarkvaralist algoritmi. Samas on pidevajas (analoogelektronikaga realiseerimiseks) väljatöötatud algoritmi, arvestades teatud erisusi, kerge üle viia digitaalseadmete tarkvarasse. Selle jaoks kasutatakse diskreetaja süsteemide teooriat. Antud materjalis on pidevaja lahenduste kõrval paralleelselt toodud ka diskreetaja analoogsed küsimused.



Joonis 1.4 Digitaalne automaatjuhtimissüsteem

Peamiseks erinevuseks pidevaja algoritmi tööst on diskreetaja signaalide saamiseks toimuv pideva (analoogsignaali) hetkväärtuste võtmine (*sample and hold*) ja kasutamine püsiva väärtusega kogu diskreetaja (diskreetimise) takti kestel. Digitaalseadmes kaasneb sellega ka analoog-digitaal (A/D) muunduri töö, mis muudab takti hetkväärtuse kvantitud amplituudiga numbriliseks väärtuseks (vt. Joonis 1.4). Juhtalgoritm arvutab igal taktil korra juhttoime väärtuse, mis muundatakse digitaal-analoog (D/A) muunduriga analoogsignaaliiks ja hoitakse (*holder*) samuti kogu takti jooksu püsiväärtusega. Kvantimise täpsus on tavaliselt 10, 12 bitti ja sellest piisab, aga täpsematel laboratoorsetel seadmetel võib see suurem olla. Esimeses lähenduses võib kvantimise täpsuse küsimuse kõrvale jätta ja kasutada diskreetaja mudeleid (kvantimata signaalidega) nagu edaspidi antud materjalis tehakse, aga enne tegelikku realiseerimist tuleb ka kvantimise võimalik mõju järgi kontrollida.

Siia ka PLC näide.

Automaatjuhtimissüsteemi loomisel on peamiselt kolm etappi. Esiteks süsteemi analüüs, mis koosneb juhitava süsteemi uurimisest ja modelleerimisest ning eesmärkide püstitusest. Selle käigus tekivad konkreetsemad ülesanded spetsifikatsioonid ja matemaatilised mudelid. Teiseks süntees, mille käigus leitakse kõige sobivam juhtimisalgoritm ja kolmandaks saadud tulemuste hindamine lähtuvalt eesmärkidest ehk kogu süsteemi analüüs. Sõltuvalt hinnangutest võib osutuda vajalikuks etappe korrata ja katsetada alternatiivseid valikuid. Nende etappide teoreetilistele alustele on pühendatud ka antud materjali peatükid. Kõik etapid realiseeritakse algul tarkvaraliste vahenditega ja sobiva lahenduse leidmisel minnakse edasi riistvaraliste lahenduste valiku ja realiseerimise juurde.

2 Dünaamiliste süsteemide matemaatiline kirjeldamine

Tehnilise süsteemi ja selle osade matemaatilist kirjeldamist kasutatakse süsteemi loomisel ning uurimisel. See annab võimaluse uurida süsteemi olulisi omadusi enne tegeliku süsteemi koostamist kasutades mitmeid analüüsi ja sünteesi meetodeid. Selline teoreetiline ja arvutuslik katsetamine aitab tagada soovitud resultaati reaalse süsteemi töötamisel. Suvalist süsteemi võib sõltuvalt eesmärgist kirjeldada mitmel erineval moel. Eesmärgi mittemõjutavad ja mitteolulised omadused jäetakse sellisest esitusest välja. Dünaamilise süsteemi kirjeldus koosneb tavaliselt võrrandite hulgast, mis kirjeldab süsteemi käitumist sobiva või vähemalt rahuldava täpsusega. Diferentsiaalvõrranditega saab kirjeldada mitmete süsteemide (mehaaniliste, elektriliste, termiliste, ökonoomiliste, bioloogiliste jms.) dünaamikat, kaasaarvutades nende mittelineaarsete omadusi. Sellised võrrandid saadakse antud valdkonda kirjeldavate füüsikaseaduste kasutamisel (nt. Kirchhoffi seadused elektrilistes ja Newton'i seadused mehaanilistes süsteemides). Näiteid sellisest tuletamisest kirjeldatakse antud peatüki punktis 2.2.

Süsteemi matemaatilise kirjelduse (mat. mudeli) täpsust on võimalik tõsta keerukuse suurendamisega lisades sellele täiendavaid võrrandeid. Analüüsi tulemuse täpsuse ja mudeli keerukuse vahel tuleb siiski leida kompromiss. Tihti on ka süsteem niipalju keerukas, et täieliku käitumise kirjeldust ei osata matemaatiliselt avaldada. Sageli äärmiselt täpsust pole vaja ja on soovitatav piirduda piisavalt adekvaatse lihtsustatud mudeliga. Teatud mittelineaarsused ja hajutatud parameetrid, mis tekitavad osatulemistega diferentsiaalvõrrandeid, võib lihtsalt kõrvale jätta, kui nende mõju süsteemi uuritavas käitumises (siiretes) on väike [(5)]. Sellisel juhul saame siiski mudeli analüüsi ja reaalse süsteemi katsete hea kokkulangevuse. Kokkulangevus võib aga kaduda teistes töörežiimides nt kõrgetel sagedustel, kus hajutatud parameetrite mõju võib olla suurem.

Vastupidiselt mittelineaarsete süsteemide sünteesi ja analüüsi meetoditele, mis on üsna keerukad^{*1}, on lineaarsete süsteemide meetodid hästi välja töötatud ning lihtsalt rakendatavad. Seetõttu reaalse süsteemi kirjeldust, mis on alati teatud määral mittelineaarne, võimaluse korral lineariseeritakse või piiratakse lineaarsete omadustega töörežiimidega. Selline lihtsustus vajab lisaks korrektsele süsteemi-kirjeldusele ka õigete eelduste ja aproksimatsioonide määramist, et lineaarne matemaatiline mudel süsteemi ikka adekvaatselt kirjeldaks [(5) pt 4].

Mudeleid võib esitada ka mittematemaatilisel kujul (nt. teise mastaabiga objektina, graafiliselt, aparatuursena, formaalkeelega jne.). Liiga keeruka ja mahuka matemaatilise kirjelduse asemel võib kasutada nt. lingvistilis-loogilisi seoseid, kuid siis on probleemiks mudeli analüüs meetodite puudus. Sarnaselt kirjeldatakse hägusloogikas süsteemi käitumine loogika reeglitega ja signaalid lingvistiliste muutujatena. Mudeli võib tuletada süsteemiga tehtud eksperimentidest saadud mõjutatavate ja mõõdetavate signaalide andmete põhjal (statistiliselt) nn. identifitseerimise teel füüsikalisi seoseid teadmata. Sellega kaasneb omaette lai probleemide ja meetodite ring, mida antud materjal kirjeldab lühidalt jättes paljud kajastamata (nt. süsteemi esitus tehismärnivõrguga või hägusloogikaga).

Matemaatilist kirjeldust võib teisendada erinevatesse vormidesse, milledest igauks sobib teatud ülesannete lahendamiseks paremini, kui teised. Näiteks LTI SISO süsteemide analüüsiks ajavallas on mugav kasutada ülekandefunktsioone. Järgnevat

^{*1} Mittelineaarsete või mittestatsionaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamine nõuab valdavalt numbrilist (arvutiga) või graafilist lahendust [(6)].

alapunktides on kokkuvõtte lineaarsete dünaamiliste süsteemide kirjeldamiseks enimkasutatavatest mudelikujudest ja nende saamise ning kasutamise võimalustest.

2.1 Matemaatilised alused: mudelid, teisendused

2.1.1 Diferentsiaalvõrrandid, olekuvõrrandid

Dünaamilised süsteemid, mis koosnevad koondatud parameetritega komponentidest, saab kirjeldada harilike diferentsiaalvõrranditega. Harilikud diferentsiaalvõrrandid sisaldavad ositavaid muutujafunktsioone (siin nt. $y(t)$) ja nende tuletisi (ka integraale) sõltumatu muutuja (t) suhtes.

Üldkujul on n -järku diferentsiaalvõrrand ($m \leq n$) esitatav kujul¹:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ehk lihtsamalt tähistades

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u. \quad (2.2)$$

Kui koefitsiendid $a_0, a_1, \dots, a_n$ ja $b_0, b_1, \dots, b_m$ ei ole otsitava muutuja $y(t)$ ja sisendmuutuja $u(t)$ funktsioonid ja $y(t)$, $u(t)$ ning nende tuletised on esimeses astmes (ei ole astendatud), siis nimetatakse sellist võrrandit **lineaarseteks diferentsiaalvõrrandiks**. Statsionaarsete omadustega süsteemi puhul on $a_0, a_1, \dots, a_n$ ja $b_0, b_1, \dots, b_m$ t -st (ajast) sõltumatud st. konstantsed.

Näiteks elektrilise RLC jadaahela saab esitada diferentsiaal-integraalvõrrandiga (2.3), kus R on takistus, L on induktiivsus, C on mahtuvus, $i(t)$ on ahela vool ja $v(t)$ on ahela pinge. Siin on t sõltumatu muutuja, $i(t)$ otsitav muutuja ja $v(t)$ sisendmuutuja.

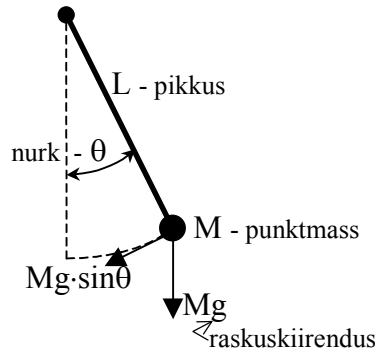
$$L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + 1/C \int i(t) dt = v(t) \quad (2.3)$$

Sarnaselt saab mehaanilise massi, vedru ja summuti jadaühenduse esitada kujul (2.4), kus $f(t)$ on ühendusele mõjuv jõud, M on mass, B sumbuvus koefitsient (hõõrde- tegur), K vedru konstant ja $y(t)$ ühenduse joonliikumist iseloomustav mõõde.

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t) \quad (2.4)$$

Mõlemad eeltoodud võrrandid (2.3) ja (2.4) on teist järku diferentsiaal võrrandid. Paljud füüsikalised süsteemid on kirjeldatavad **mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite** abil. Nt. pendli Joonis 2.1 kiikumist iseloomustav diferentsiaalvõrrand, mis ei sisalda hõõrdumist ja õhutakistust on esitatav kujul (2.5).

¹ Enamasti teisendatakse võrrand kujule, kus koefitsient $a_n = 1$. Sellist kuju eeldatakse ka edaspidises materjalis, kui a_n just ilmutatud kujul esitatud pole.



Joonis 2.1 Pendli parameetrid ja mõjuva jõu komponendid

$$ML \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + Mg \cdot \sin \theta(t) = 0 \quad (2.5)$$

Üldiselt saab n -järku diferentsiaalvõrrandid dekomponeerida n esimest järku võrrandiks. Kuna esimest järku võrrandeid on lihtsam lahendada, siis juhtimis-süsteemide analüüsimiseks esitatakse neid just sellise kujul. Teist järku võrrandi (2.4) jaoks võib valida asendusmuutujad

$$x_1(t) = y(t), \quad (2.6)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt}, \quad (2.7)$$

ja esitada see uuel kujul:

$$M \frac{dx_2(t)}{dt} = -Kx_1(t) - Bx_2(t) + f(t). \quad (2.8)$$

Süsteemi täielikuks kirjeldamiseks koos (2.6)-ga saame nüüd kaks esimest järku diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad (2.9)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{B}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}f(t) \quad (2.10)$$

Samal viisil saab ka n -järku diferentsiaalvõrrandi (2.2) esitada n esimest järku diferentsiaalvõrrandiga. Kui algne võrrand sisaldab sisendmuutuja u tuletisi, mida näiteks toodud 2.-järku võrrandites polnud, siis ei pruugi analoogselt^{*1} saadud n võrrandit omada ühest lahendit [(5) pt. 2]. Sellisel juhul tuleb asendusmuutujad x_i valida u tuletisi elimineerivateks näiteks järgnevalt^{*2}:

^{*1} $dx_i/dt = x_{i+1}$, $i = 1, \dots, (n-1)$

^{*2} Esitatud maksimaalse astme ($m = n$) jaoks. Kui $m < n$, siis $\beta_n = 0, \dots, \beta_{m+1} = 0$.

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_n u \\
x_2 &= \dot{x}_1 - \beta_{n-1} u = \dot{y} - \beta_n \dot{u} - \beta_{n-1} y \\
x_3 &= \dot{x}_2 - \beta_{n-2} u = \ddot{y} - \beta_n \ddot{u} - \beta_{n-2} u \\
&\vdots \\
x_n &= \dot{x}_{n-1} - \beta_1 u = y^{(n-1)} - \beta_n u^{(n-1)} - \beta_{n-1} u^{(n-2)} - \dots - \beta_2 \dot{u} - \beta_1 u
\end{aligned} \tag{2.11}$$

kus konstantne kordaja

$$\begin{aligned}
\beta_n &= b_n \\
\beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_{n-1} \beta_n \\
\beta_{n-2} &= b_{n-2} - a_{n-1} \beta_{n-1} - a_{n-2} \beta_n \\
\beta_{n-3} &= b_{n-3} - a_{n-1} \beta_{n-2} - a_{n-2} \beta_{n-1} - a_{n-3} \beta_n \\
&\vdots \\
\beta_1 &= b_1 - a_{n-1} \beta_2 - \dots - a_2 \beta_{n-1} - a_1 \beta_n \\
\beta_0 &= b_0 - a_{n-1} \beta_1 - \dots - a_2 \beta_{n-2} - a_1 \beta_{n-1} - a_0 \beta_n
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Sellisel valikul on n -st esimest järku diferentsiaalvõrrandist koosnev süsteem järgmine:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_{n-2} u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_1 u \\
\dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_{n-2} - a_{n-1} x_n + \beta_0 u
\end{aligned} \tag{2.13}$$

ja otsitav muutuja

$$y = x_1 + \beta_n u = x_1 + b_n u. \tag{2.14}$$

Kuna algväärtuste ($t=t_0$) $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ja sisendi $u(t)$ teadmine kirjeldab täielikult süsteemi edasise ($t>t_0$) käitumise, siis nimetatakse muutujaid $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ **olekumuutujateks** ja sellist esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi **olekuvõrranditeks**. Olekumuutujate hulk sisaldab täielikku infot süsteemi seisundi kohta ja eelneva käitumise kohta. Olekumuutujate väärtused suvalisel alghetkel t_0 nn. **algoleku** saab määrata seose (2.11) järgi, mis nõuab otsitava muutuja kõikide tuletiste $y^{(n-1)}(t_0), y^{(n-2)}(t_0), \dots, y^{(2)}(t_0), y^{(1)}(t_0), y(t_0)$ teadmist^{*1}.

Olekuvõrranditega süsteemikirjelduse saab esitada ka maatriks-vektor kujul (2.15) ja (2.16) on süsteemi algebraline **väljundvõrrand**.

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t) \quad e. \quad \dot{X} = AX + Bu \tag{2.15}$$

$$y(t) = CX(t) + Du(t) \quad e. \quad y = CX + Du \tag{2.16}$$

kus $n \times n$ mõõdus A , $n \times 1$ mõõdus B , $1 \times n$ mõõdus C ja 1×1 mõõdus D maatriks

^{*1} Praktikas esinevate häiringute tõttu on kõrgemat järku tuletiste leidmine ebatäpne, mistõttu selline olekumuutujate valik ei pruugi kõrgemat järku süsteemile alati sobida.

ning olekuvektorid ($n \times 1$) on lahtikirjutatutena võrrandeis järgmisel kujul:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-2} \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-3} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \cdot u \quad (2.17)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u \quad (2.18)$$

Olekumuutujaid saab valida mitmeti ja n -järku diferentsiaalvõrrandi olekuvõrrandite esitus on mitmekesine. Kasutades dekomponeerimist [(2) pt.11] saame järgmised nn.

kanoonilised kujud:

Juhitav kanooniline

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (2.19)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u \quad (2.20)$$

ja

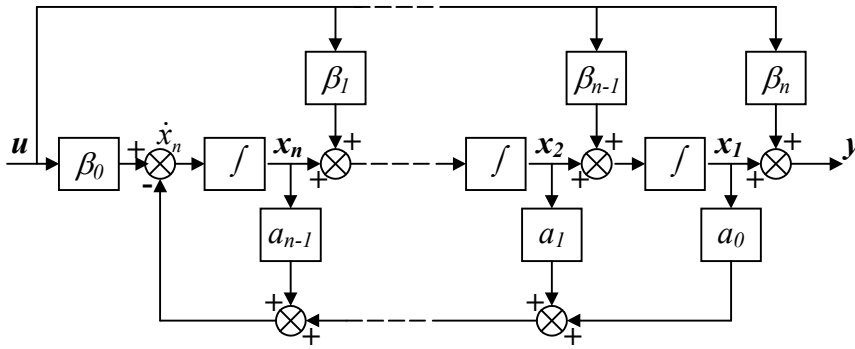
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (2.21)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot X \quad \left(\begin{array}{c} m < n \\ b_n = 0, \dots, b_{m+1} = 0 \end{array} \right)$$

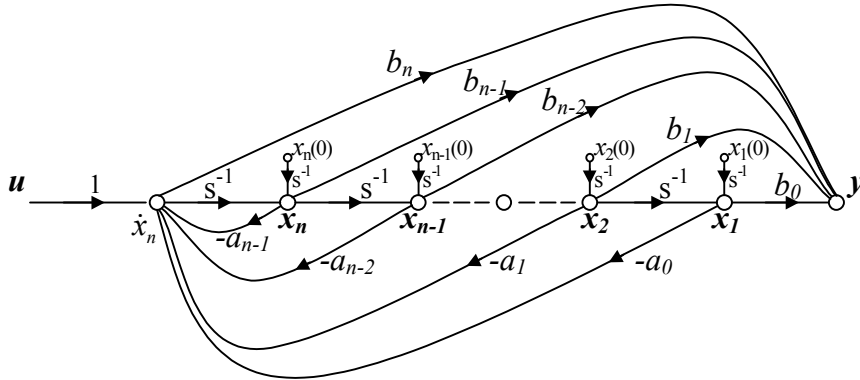
Jälgitav kanooniline

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + [b_n] \cdot u \end{aligned} \quad (2.22)$$

Oleku- ja väljundvõrrandeid (2.13), (2.14) saab esitada ka plokskeemina (Joonis 2.2). Kanoonilise kuju (2.19), mis erineb vaid B ja C maatriksi poolest, esitus olekugraafina (Joonis 2.3) on A maatriksi osas samasugune.



Joonis 2.2 Oleku- ja väljundvõrrandi esitus plokskeemina



Joonis 2.3 Kanoonilise oleku- ja väljundvõrrandi esitus olekugraafina

2.1.2 Diferentsvõrrandid

Diskreetaja signaalidega süsteemide esitamiseks sobivad **diferentsvõrrandid**. Diferentsvõrrandeid kasutatakse ka diferentsiaalvõrrandite aproksimeerimiseks digitaalarvutis, kuna nad on lihtsamalt esitatavad ja lahendatavad. Näiteks võib funktsiooni tuletise aproksimeerida ettetõttava diferentsiga (vahega):

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=kT} \cong \frac{y[(k+1)T] - y(kT)}{T} \quad (2.23)$$

kus intervall T on valitud piisavalt väike, et saada hea aproksimatsioon. Diferentsiaalvõrrandi (2.7) saab esitada diferentsvõrrandi kujul järgmiselt:

$$\frac{x_1[(k+1)T] - x_1(kT)}{T} = x_2(kT) \quad (2.24)$$

ehk

$$\frac{1}{T} x_1[(k+1)T] = \frac{1}{T} x_1(kT) + x_2(kT). \quad (2.25)$$

Üldiselt võrdse taktiperioodiga T esituses valitakse T aja mõõtühikuks ja muutuja taktihetki kirjeldatakse täisarvudena. Nii võib lineaarse konstantsete koefitsientidega n -järku diferentsvõrrandi esitada kujul ($m \leq n$):

$$\begin{aligned} a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = \\ = b_m u(k+m) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k), \end{aligned} \quad (2.26)$$

kus $y(i)$, $i = k, k+1, \dots, k+n$ näitab diskreetset otsitavat väljundmuutujat y i -ndal taktil ja $u(i)$, $i = k, k+1, \dots, k+m$ näitab diskreetset sisendmuutujat u i -ndal taktil kui sõltumatu muutuja on aeg. Analoogselt pidevate süsteemidega on siin kasulik kasutada n esimest järku (**oleku**) võrrandiga esitust. Lihtsamal juhul, kui otsitav muutuja sõltub vaid sisendist k -ndal taktil ($b_1=0, \dots, b_m=0$), võib olekumuutujad valida nt. järgnevalt:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= x_1(k+1) = y(k+1) \\ &\vdots \\ x_n(k) &= x_{n-1}(k+1) = y(k+n-1) \end{aligned}, \quad (2.27)$$

Olekuvõrrandid saame siis kujul:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \\ x_n(k+1) &= -\frac{a_0}{a_n} x_1(k) - \frac{a_1}{a_n} x_2(k) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(k) + \frac{b_0}{a_n} u(k) \end{aligned}. \quad (2.28)$$

Maatriks-kujul on eelnev esitatav järgmiselt:

$$X[(k+1)T] = AX(kT) + Bu(kT) \quad \text{e.} \quad X(k+1) = AX(k) + Bu(k), \quad (2.29)$$

kus olekumuutujatevektor e . ($n \times 1$) olekuvektor ja koefitsientide maatriksid A ($n \times n$), B ($n \times 1$) on kujul:

$$X(kT) = \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_n} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

(2.31)

Väljundvõrrand on $y(k) = x_1(k)$ ja maatrikskujul

$$Y(kT) = CX(kT) + Du(kT) \quad e. \quad Y(k) = CX(k) + Du(k), \quad (2.32)$$

kus $D = 0$ ja $C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$. Saadud maatriksid on samase ülesehitusega, nagu diferentsiaalvõrrandite maatriks kujul esitamisel (2.17) (2.18), kui sisendi tuletislikke komponente diferentsiaalvõrrandis (2.1) pole. Analoogselt diferentsiaalvõrranditele (vt. (2.19)...(2.22)) saab ka diferentsvõrranditele koostada kanoonilised oleku- ja väljundvõrrandite esitused.

2.1.3 Laplace'i teisendus, z-teisendus ja kompleksmuutujafunktsioonid

Laplace'i teisendus on matemaatiline vahend harilike lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks. Teisendamisel tehakse diferentsiaalvõrranditest algebralised kompleksmuutuja s võrrandid, mida on lihtne lahendada ja siis viiakse nn. kujutistevallas tulemus pöördteisendusega ajavalda tagasi. Diferentsvõrrandite ja diskreetsete (või digitaalsete) lineaarsete süsteemide lahendamiseks kasutatakse **z-teisendust**. Nende teisenduste definitsioonid, omadused ja pöördteisenduste kasutamise õpetusi leiab enamusest automaatjuhtimise õpikutest. Sealsamas on vahest esitatud ka kompleksmuutuja ja kompleksmuutujafunktsioonide põhialused, sest Laplace'i teisenduse muutuja s ja z-teisenduse muutuja z on kompleksmuutujad, ning klassikalises automaatjuhtimisteoorias kasutatakse neid pidevalt. Käesolev materjal ei pea vajalikuks süsteemiteoorias [(6)] omandatud sellekohaseid põhitõdesid siinkohal korrata.

2.1.4 Ülekandemudel, ülekandefunktsioon, olekumudel

Diferentsiaalvõrrandiga või diferentsvõrrandiga esitatud süsteemikirjelduse lahend seob süsteemi sisendmuutuja otseselt väljundmuutujaga. Kui süsteemis eeldatakse nulliseid algtingimusi ($y^{(i)}(t_0) = 0, i = 1, \dots, n$ või $y(k_0 + i) = 0, i = 0, \dots, n$), siis nimetatakse sellist süsteemikirjeldust **ülekandemudeliks**. Ülekandemudelit saab esitada ka ülekandefunktsioonina.

Ülekandefunktsiooniks (ÜKF) nimetatakse lineaarse statsionaarse süsteemi sisendmuutuja suhet väljundmuutujasse, kus muutujad on esitatud tuletisoperaatori funktsioonidena [pt. 2]. Laplace'i teisenduse "tuletise kujutise" omadust (2.33) kasutades saab diferentsiaalvõrrandi (2.1) esitada muutuja s funktsioonidena (2.35), kusjuures kujutise vallas kajastab nn. operaatormuutuja s just tuletisoperaatorit.

$$\begin{aligned}
\frac{dy(t)}{dt} &\xrightarrow{L} sY(s) - y(t_0) \\
\frac{d^2 y(t)}{dt^2} &\xrightarrow{L} s^2 Y(s) - sy(t_0) - \frac{dy}{dt}(t_0) \\
\frac{d^n y(t)}{dt^n} &\xrightarrow{L} s^n Y(s) - s^{n-1}y(t_0) - s^{n-2} \frac{dy}{dt}(t_0) - \dots - s \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}}(t_0) - \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t_0)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Algväärtused (2.33) jaoks on nullised.

$$\frac{d^i y}{dt^i}(t_0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) &= \\
= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

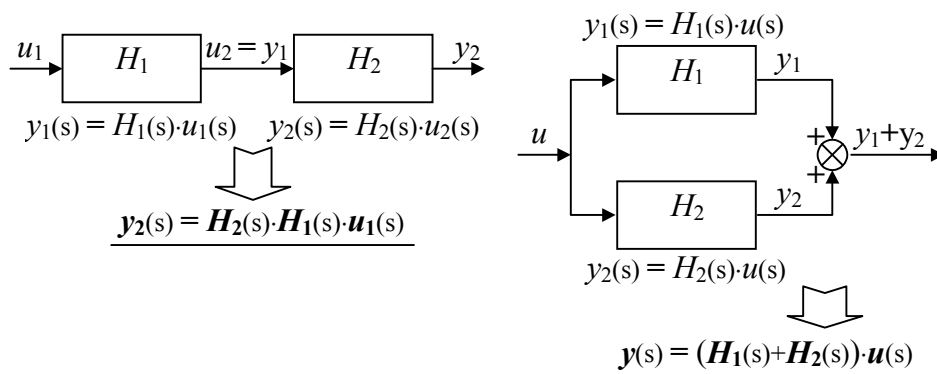
Kirjutades avaldise (2.35) ümber suhtena saame ülekandefunktsiooni $H(s)$ esituse:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \tag{2.36}$$

Analoogselt saab ülekandefunktsiooni esitada diskreetaja süsteemi (2.26) jaoks:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}. \tag{2.37}$$

Ülekandefunktsioon ei sõltu sisendsignaalist (-muutujast) ja on määratud vaid süsteemi omadustega (parameetritega). Ülekandefunktsiooni teades saab antud sisendsignaali jaoks (leides selle kujutise $u(s)$) arvutada väljundsignaali ajalisi muutumisi kirjeldava avaldise. Ülekandefunktsioonide omaduste tõttu (Joonis 2.4) on neid hea kasutada ka süsteemide ühenduste arvutamisel.



Joonis 2.4 Ülekandefunktsioonid süsteemide jada- ja paralleelühendusel

Ülekandefunktsiooni saab esitada ka lugeja polünoomi nullkohtade e. nullide n_j ja nimetaja polünoomi nullkohtade e. pooluste p_i abil kujul (2.38)

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{1 s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m (s - n_1) \dots (s - n_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} = \\
&= \frac{b_m \prod_{j=1}^m (s - n_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Ülekandefunktsiooni nimetaja polünoomi võrdsustamisel nulliga saame nn. süsteemi **karakteristliku võrrandi**, mille lahendid ongi ülekandefunktsiooni poolused.

Ülekandefunktsioonide kasutamine on väga tähtsal kohal klassikalises automaatsjuhtimisteoorias. Asümptootiliselt stabiilse süsteemi ÜKF on ka eksperimentaalselt määratav, mis on hea omadus.

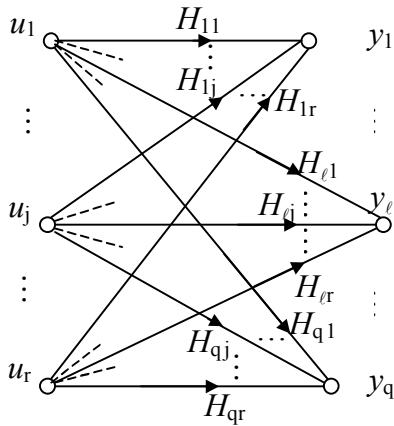
Mitme sisendi ja väljundiga (mitmemõõtmelise) süsteemi puhul kirjeldab üks diferentsiaalvõrrand, diferentsvõrrand või ülekandefunktsioon ühe sisendi ja väljundi paari omavahelist seost, kusjuures teised sisendid eeldatakse olevat nullised. Lineaarse süsteemi superpositsiooni printsiibi alusel on samaaegselt mõjuvate sisendite kogutoime ühele väljundile kõikide üksikult mõjuvate sisendite toimete summa. Üldiselt, kui süsteem omab r sisendit ja q väljundit (vt. Joonis 2.5) on ülekandefunktsioon ainult j -ndast sisendist ℓ -ndasse väljundisse defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned}
H_{\ell j}(s) &= \frac{Y_{\ell}(s)}{U_j(s)}, \quad \text{või} \quad H_{\ell j}(z) = \frac{Y_{\ell}(z)}{U_j(z)}, \\
U_k(s) &= 0, \quad \text{või} \quad U_k(z) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, k \neq j
\end{aligned} \quad (2.39)$$

Ülekanne kõikidest sisenditest ℓ -ndasse väljundisse avaldub järgmiselt:

$$Y_{\ell}(s) = \sum_{j=1}^r H_{\ell j}(s) U_j(s) \quad \text{või} \quad Y_{\ell}(z) = \sum_{j=1}^r H_{\ell j}(z) U_j(z) \quad \ell = 1, 2, \dots, q \quad (2.40)$$

Kõik ülekandefunktsioonid sisendite ja väljundite vahel on mugav esitada $q \times r$ mõõdus maatriksi kujul nn. **ülekandefunktsioonide maatriksina** $H(\cdot)$, mis seob $r \times 1$ mõõdus sisendite kujutiste vektorit $q \times 1$ mõõdus väljundite kujutiste vektoriga (2.41).



Joonis 2.5 Ülekandefunktsioonide matriksi $H(\cdot)$ elemendid

$$Y(s) = H(s)U(s) \text{ või } Y(z) = H(z)U(z)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1r} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{q1} & H_{q2} & \cdots & H_{qr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_r \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Vaadeldud ühe sisendmuutujaga ja ühe otsitava väljundmuutujaga (SISO) olekuvõrrandite esitused vektor-matriksi kujul saab laiendada ka mitme sisendi ja väljundiga süsteemi esitamise jaoks. Kõige üldisemal kujul on n -järku mitmemõõtmelise dünaamilise pidevaja süsteemi olekuvõrrandid esitatavad kujul:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), w_1(t), \dots, w_v(t)) \quad i = 1 \dots n, \quad (2.42)$$

mis vektorkujul esitades on

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), U(t), W(t)), \quad (2.43)$$

kus $X(t)$ on olekute vektor, $U(t)$ sisendite vektor ja $W(t)$ häiringute vektor:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} (n \times 1), \quad U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} (r \times 1), \quad W(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_v(t) \end{bmatrix} (v \times 1). \quad (2.44)$$

$$(2.45)$$

$$(2.46)$$

Süsteemi väljundvõrrandid üldisel kujul on järgmised:

$$y_\ell(t) = g_\ell(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), w_1(t), \dots, w_v(t)) \quad \ell = 1 \dots q \quad (2.47)$$

mis vektorkujul esitades on

$$Y(t) = G(X(t), U(t), W(t)). \quad (2.48)$$

kus $Y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)]^T$ on väljundite vektor.

Mittestatsionaarsel süsteemil sõltuvad funktsioonid f_i ($i = 1, \dots, n$) ja g_ℓ ($\ell = 1, \dots, q$) vektorites F ja G vahetult ajast. Eeltoodud üldise funktsionaalse sõltuvusega kirjelduse (2.42)(2.47) alusel saab esitada ka mittelineaarseid süsteeme.

Olekuvõrrandite ja väljundvõrrandite kogu (nn. dünaamilisi võrrandeid) ehk sellist süsteemikirjeldust, mis seob sisend-, oleku- ja väljundmuutujad, nimetatakse **süsteemi olekumudeliks**.

Lineaarse süsteemi olekumudel on esitatav maatriks-vektor kujul järgmiselt

$$\begin{aligned}\frac{dX(t)}{dt} &= A(t)X(t) + B(t)U(t) + G(t)W(t) \\ Y(t) &= C(t)X(t) + D(t)U(t) + J(t)W(t)\end{aligned}\quad (2.49)$$

Vektorvõrrandite parameetermaatriksite $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $G(t)$, $J(t)$ elemendid võivad sõltuda ajast^{*1}, rikkumata lineaarsusomadusi [(5) pt.3]. Sel puhul nimetatakse süsteemi mittestatsionaarseks. Mistahes parameetri sõltuvus mingist muutujast $x_i(t)$, $y_\ell(t)$ või $u_j(t)$ muudab süsteemi mittelineaarseks. Vektor-maatriks kuju kasutamine lihtsustab oluliselt süsteemivõrrandite matemaatilist esitust.

Sarnaselt SISO süsteemi kirjeldustele (2.15)(2.16)(2.29)(2.32) esitatakse statsionaarse lineaarse pidevaja süsteemi, kus häiringute parameetermaatriksid (G , J) pole teada või ei oma tähtsust, olekumudel tüüpkuul

$$\begin{aligned}\frac{dX(t)}{dt} &= AX(t) + BU(t) \\ Y(t) &= CX(t) + DU(t)\end{aligned}\quad (2.50)$$

ning statsionaarse lineaarse diskreetaja süsteemi olekumudel kujul

$$\begin{aligned}X(k+1) &= A_d X(k) + B_d U(k) \\ Y(k) &= CX(k) + DU(k)\end{aligned}\quad (2.51)$$

kus A ja A_d nimetatakse süsteemimaatriksiks, B ja B_d sisendmaatriksiks, C väljundmaatriksiks ja D otsesidemaatriksiks. Süsteemimaatriksite ja sisendmaatriksite erineva tähistusega rõhutatakse seda, et pideva olekumudeliga esituselt diskreetsele üleminekul ja vastupidi nimetatud maatriksite parameetrid muutuvad.

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qr} \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (2.52)$$

^{*1} Sõltuvust on vaja teada muutujatega samas ajaskaalas.

2.1.5 Mudelite esitus MATLAB-is

Insenerlikes arvutustes kasutatakse peamiselt tarkvaravahendeid, mis hõlbustavad ja kiirendavad mitmete arendustsüklite kulgu. MATLAB on väga levinud numbriliste arvutuste ja visualiseerimise keskkond, olles võimas abivahend õppe- ja teadustöös kui ka praktilise inseneritöö jaoks. MATLAB opereerib lihtsalt maatriks kujul esitatud andmetega, tehes sellega tema kasutamise väga mugavaks maatriksarvutust sisaldavate meetodite jaoks.

MATLAB-is ja sellesse integreeritud valdkond-orienteeritud funktsioonide pakettides (nn *Toolbox*-ides) on vahendeid andmete analüüsiks, mittelineaarsete numbriliste arvutusmeetodite kasutamiseks, signaalitöötluseks, optimeerimiseks, süsteemide identifitseerimiseks, diferentsiaalvõrrandite numbriliseks lahendamiseks, analüüsiks ja sünteesiks süsteemiteooria ning automaatjuhtimise vallas jms. Käesolev materjal toetub peamiselt MATLABi *Control System Toolbox*-i (edasj. CSTb) kasutamisele.

Kõige lihtsamalt saab ülekandefunktsioone ja lineaarseid statsionaarseid olekumodeleid esitada konstantsete parameetrite (polünoomi kordajate¹) vektorite ning maatriksite abil. Siiski kasutatakse alates MATLABi versioonist 5.0 ja CSTb versioonist 4.0 nn LTI (*Linear Time-Invariant*) struktuurse andmeobjekti esitusvormi (vt täpsemalt „*LTI Properties and Methods*“[(7)] ja sisestussüntaks Joonis 2.6), mis seob lisaks vektoritele või maatriksitele süsteemi mudeli kirjeldusega ka muid andmevälju, nagu sisendite, väljundite, olekute nimed, diskreetimise takt, hilistused jm. Sellise LTI andmeobjekti sisu moodustavate andmeväljade (ingl. *properties*) loendi saab MATLABi käsureal välja kutsuda käsuga `get(LTI_objekti_nimi)` ja vajalike väljade sisu omistada käsuga `set(,)`. Samuti saab objekti parameetrite andmevälju lugeda / kirjutada kasutades avaldisena andmeobjekti nime ja välja sidumist punktiga (`LTI_objekti_nimi.välja_nimi`). Ühe ja sama käsuga (`tf`, `ss`, `zpk`) saab sisestada mudelit ja teisi mudeliesitusi antud mudeliesituseks ümber teisendada.

```
>> lug=[2 1]           % lugeja polünoomi korjajad [bm bm-1 ... b2 b1 b0]
lug =                  sisestuse tulemus kajatakse kohe pärast ↵
     2     1
>> nim=[2 3 0 1];      % nimetaja polünoomi korjajad [an an-1 ... a2 a1 a0]
                        ; käsu lõpus keelab tulemise kajamise
>> sys1=tf(lug,nim)    % ülekandefunktsiooni sisestus LTI mudelina
```

```
Transfer function:      sys1 on näite LTI objekti nimi
      2 s + 1
-----
      2 s^3 + 3 s^2 + 1
```

¹ MATLAB eeldab (nt. s ja z muutuja) polünoomide esitust kujul, kus kordajad on muutuja astmete vähenemise järjekorras. Nt. $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ sisestatakse MATLABis $[a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_2 \ a_1 \ a_0]$.

```

>> sys2=zpk([],[-3 -4],0.8)    % nullide, pooluste vormis sisestus LTI mudelina

Zero/pole/gain:                parmeetrite väärtusi saab mudelisse anda ka
    0.8                        otse funktsiooni sisendmuutujatena neid
-----                        varem nimega abimuutujatena tekitamata
(s+3) (s+4)                    [] – tühimaatriks / -vektor

>> Sys2=tf(sys2)               % ühe LTI mudeli vormi teisendamiseks teise vormi
                                % kasutatakse samu funktsioone tf, zpk, ss

Transfer function:              suure algustähega muutuja Sys2 on
    0.8                        MATLABi jaoks teine objekt kui muutuja
-----                        sys2
s^2 + 7 s + 12

>> A=[-1 0;0 -2];B=[0 1;1 0];C=[1 1];    % olekumudeli maatriksite A B C sisestus
                                           [a11 a12 ... a1n; a21 a22 ... a2n; an1 an2 ... ann]
                                           [b11 b12 ... b1r; b21 b22 ... b2r; bn1 bn2 ... bnr]
                                           [c11 c12 ... c1n; c21 c22 ... c2n; cq1 cq2 ... cqn]

>> sys3=ss(A,B,C,[0 0]);        % olekumudeli sisestus LTI mudelina,
                                % D on nulline maatriks
                                [d11 d12 ... d1r; d21 d22 ... d2r; dq1 dq2 ... dqr]

```

Joonis 2.6 Mudelite sisestus MATLABi käsureal >>

MATLAB ja CSTb sisaldab veel teisigi võimalusi mitmemõõtmeliste mudelitega opereerimiseks (nt *Cell Arrays*, ülekandefunktsioone saab esitada MIMO süsteemi jaoks koos ühes objektis nõ. ülekandefunktsioonide maatriksina jms), mida siinkohal ei kajastata (vt täpsemalt [(7)]). Samuti leidub palju võimalusi mudelite omaduste hindamiseks, mida tutvustatakse põgusalt peatükis 3 Süsteemide analüüs. Iga MATLABi funktsiooni sisu ja kasutamise süntaksi kohta saab lühiinfot ka käsureal käsuga `help funktsiooni_nimi`.

LTI objektidena esitatud mudelite omavaheline ühendamine on võimalik mitmeti ja selliselt üheks objektiks koondatud kirjeldusega süsteemi loomine on MATLAB-is kerge. Lihtne jadaühendus moodustatakse tulemuseks, kui kasutada avaldises objektide (nimede) vahel korrutusmärki *. Pluss või miinus märgiga saab süsteemide paralleelühenduse, kus vastavad väljundid liituvad või lahutuvad (vt. Joonis 2.4). On ka funktsioone nende (series, parallel) ja teiste (feedback, lft) ühenduste ning teisenduste (inversioon, transponeerimine jm) jaoks. Antud materjalis eelistatakse siiski parema ülevaatlikkuse tõttu süsteemi osade mudelitest erinevate struktuuride loomiseks kasutada MATLABi graafilist keskkonda Simulink (vt 2.2.2 Dünaamilise süsteemi simuleerimine MATLAB/Simulink-is). Funktsioonidega ühe nime alla kokkuühendatud objektina on vaja süsteemi moodustada vaid juhul, kui soovitakse kasutada teatud analüüsifunktsioone või tööriistu (nt LTI Viewer) kogu süsteemi kirjelduse peal.

Paljude andmete sisestus-väljastus ja muude käskude (funktsioonide) korruga (järjest) või korduvaks täitmiseks on kasulik MATLABis koostada teksti kujul käsufailid (nn m-failid) või uued kasutajafunktsioonid. Need võivad sisaldada kõiki programmeerimiskeeltes tuntuid programmi voo täitmist suunavaid käskke.

Pidevaja mudelilt diskreetaja mudelile ja vastupidi üleminekuks on CSTb-s funktsioonid `c2d`, `d2c`, `d2d`. Kanoonilistele esituskujudele üleminekuks on nt.

funktsioon *canon* ning polünoomidega arvutamiseks *conv*, *deconv*, *roots* jm. Nende kasutamist demonstreerivad mitmed järgnevate peatükkide näited. MATLABi funktsioonide meeldejätmist hõlbustab inglisekeelse nimetuse või lühendi kasutamine funktsiooni nimes:

tf -	<i>transfer function</i>	- ülekandefunktsioon (ÜKF)
ss -	<i>state space</i>	- olekumudel
zpk -	<i>zero-pole-gain</i>	- nullide/poolustega ja teguriga ÜKF-i esitus
c -	<i>continuous</i>	- pidevaja
d -	<i>discrete</i>	- diskreetaja
c2d -	<i>continuous to discrete</i>	- üleminek esimeselt teisele

2.2 Modelleerimine

2.2.1 Süsteemivõrrandite kirjutamine

Põhjalikke õpetusi koos paljude näidetega, kuidas kirjutada füüsikalisele süsteemile lihtsustatud oleku- ja diferentsiaalvõrrandeid, antakse väga paljudes laialdaselt levinud automaatjuhtimissüsteemide õpikutes [nt. (5) pt. 4, (8) pt. 2, (9) pt. 2, (2) pt.3]. Käesolev punkt annab lühikese üldistuse, kuidas füüsika erinevate valdkondade süsteemide mudelituletus on analoogne üksteistega ja punkt 2.2.3 toob ühe komplekse näite multivaldkondliku (elektromeh.) süsteemi mudeli koostamisest.

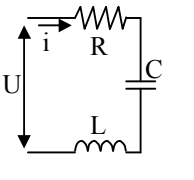
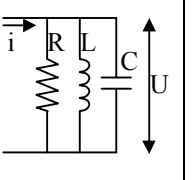
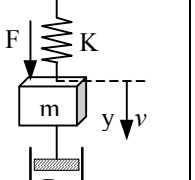
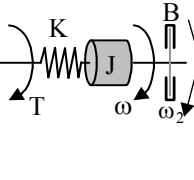
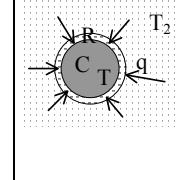
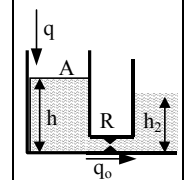
Süsteemi matemaatilise kirjelduse loomine koosneb tavaliselt teatud eristuvatest etappidest nagu objekti tundmaõppimine, seoste leidmine, andmete mõõdistamine, kehtivuse kontroll ja parandamine ning lihtsustamine pruukimise parandamiseks. Alustades sisendite, väljundite ja häiringute määramisest, leitakse matemaatilised avaldised, mis neid seovad. Täpsustatakse katseliste mõõtmiste või arvutuste abil esialgsed parameetrid. Kontrollitakse ja parandatakse kirjeldust, kuni see langeb piisavalt hästi kokku tegeliku käitumisega. Mudelisse olulisi muutujaid valides lähtutakse juhtimisülesandest, mille jaoks seda mudelit luuakse. Mõned vähemtähtsad sisemised muutujad saab kirjeldusest välja jätta, esitada oluliste muutujate kaudu või esitada häiringutena

Mudeli koostamine algab elementide ja nende vaheliste ühenduste (sidemete) tuvastamisest ning nende muutujate vaheliste seoste kirjeldamine. Energia, aine (massi), laengu ja liikumishulga jäävuse seaduste esitamisel tuleb tasakaaluvõrranditesse põhiliselt kolme näitaja (suuruse kvantiteet, seda muutev mõjutus ja aeg) seosed.

Tuleb rõhutada, et antud materjalis toodud mudelite tuletus esindavad lihtsamate näidete klassi ja tuleb arvestada, et tõsiste reaalsete ülesannete puhul võib mudeli (-te) tuletus kujuneda oluliselt keerukamaks.

Järgnevas tabelis on 1.- 7. reas füüsikaliste suuruste analoogid mudeli koostamise analoogiatega põhjal [SI ühikutega]. 4.-ndas reas on lisaks toodud ka lihtsustatud seadus/seos tasakaaluvõrrandite esitamiseks, mille süsteem on 8.-ndal real. 5.-s reas energiat neelav element, 6. ja 7. reas energiat salvestav element ja energia avaldis. 9.-s reas mõned võimalikud mittelineaarsused selliste süsteemide juures.

Tabel 2-1 Füüsiliste süsteemide võrdlus lineaarse mudeli koostamise analoogiate põhjal

	Elektrilised süsteemid		Mehaanilised süsteemid		Termilised süsteemid	Vedelike mahutid
			Kulgliikumine	Pöördliikumine		
1.	q - laeng $q = \int i dt$	Φ magnetvoog [Wb, V.s] $\Phi = \int U dt$	y - teepikkus [m]	θ - pöördenurk [rad]		
2.	i - vool [A] $i = \frac{dq}{dt}$	U - pinge [V] $v = \frac{d\Phi}{dt}$	v - kiirus [m/s] $v = \frac{dy}{dt}$	ω - nurkkiirus [rad/s] $\omega = \frac{d\theta}{dt}$	T - temperatuur [°]	h - nivoo [m]
3.	$\frac{di}{dt}$	$\frac{dU}{dt}$	a - kiirendus [m/s ²] $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$	α - nurkkiirendus [rad/s ²] $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$	$\frac{dT}{dt}$	$\frac{dh}{dt}$
4.	U - pinge [V] $U = L \frac{di}{dt} + R \cdot i + q/C$	i - vool [A] $i = C \frac{dU}{dt} + U/R + \Phi/L$ Kirchoffi s.-d	f - jõud [N, m.kg/s ²] $F = m \frac{dy^2}{dt^2} + B(v - v_2) + K \cdot y$ Newtoni II s.	T - jõumoment [N.m] $T = J \frac{d\theta^2}{dt^2} + B(\omega - \omega_2) + K \cdot \theta$	q - soojusvoog [J/s, W] $q = C \frac{dT}{dt} + (T - T_2)/R$	q - voog [m ³ /s] $q = A \frac{dh}{dt} + (h - h_2)/R$
5.	R - takistus [Ω]	1/R - juhtivus; [S, 1/Ω] R - takistus [Ω]	B - hõõrdetegur [N/m/s]	B - hõõrdetegur [N.m/rad/s]	1/R R - soojus- takistus * ¹ [°/J/s]	1/R R - hüdraul. takistus [s/m ²]
6.	L - induktiivsus [H, Wb/A, Ω.s] $E = \frac{1}{2} L \cdot i^2$	C - mahtuvus [F, s/Ω] $E = \frac{1}{2} C \cdot U^2$	m - mass [kg] $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	J - inertsimoment [kg.m ²] $E_k = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$	C - soojus- mahtuvus *² [J/°] $E = \frac{1}{2} C \cdot T^2$	A - mahtuvus [m ²] $E = \frac{1}{2} \rho A h^2$
7.	1/C [1/F] C - mahtuvus [F]	1/L [1/H] L - induktiivsus [H]	K - vedru jäikus [N/m] $E_p = \frac{1}{2} K \cdot y^2$	K - vedru jäikus [N.m/rad] $E_p = \frac{1}{2} K \cdot \theta^2$		
8.						
9.			staatiline ja Coulumb'i hõõrde- jõud, lõtk		ebaühtlane temperatuur	turbulentne voolamine

¹ a) $1/R = k_{sv} \cdot A$,

k_{sv} - soojusülekanne tegur, A - pind [m²].

b) $1/R = k_{sj} \cdot A/l$,

k_{sj} - soojusjuhtivuse tegur [W/m.K], A - pind [m²], l - soojusjuhi paksus.

² $C = S \cdot m$,

S - erisoojus [J/kg.°]

Näiteks mehhaaniline kiirendusandur, mille sisemise tajurmassi ühesihiline nihe on sõltuv anduri korpuse samasihilisest kiirendusest, on ülesehituselt analoogne Tabeli 2-1 kulgliikumise veeru 8.-ndas reas esitatud skeemiga. Kogu vedru, massi, summuti kooslus on kinnitatud jäika korpusesse, mille kiirendust hinnatakse. Sellise süsteemi kirjelduse avaldamiseks võetakse sisendiks korpuse kiirendus dv_2/dt ja väljundiks massi nihe $y(t)$. Lähtudes Newtoni II seadusest saab massi liikumise avaldada jõudude tasakaaluvõrrandina (iga korrutisega saadud komponent on jõu ühikutes).

$$m \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dv_2(t)}{dt} \right) = -B \frac{dy(t)}{dt} - Ky(t) \quad (2.53)$$

Sulgudes on tajurmassi kiirenduse (maapinna suhtes) avaldis. Avaldame võrrandi uuesti sisendi paremale poole tuues ja saame Tabeli 2-1 4.-nda rea ja (2.4)-ga sarnase mudeliesituse

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = m \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (2.54)$$

Süsteemide mittelineaarsuste mitmekesisuse tõttu on ka lineariseerimise meetodid sageli erinevad. Kui saab, siis kõigepealt määratakse kindlaks süsteemi staatilised tööpunkt(id), mille ümbruses mudelit leida soovitakse. Mittelineaarsed seosed saab seal arendada nt. Taylor-i ridadesse. See muidugi piirab lineariseeritud mudeli kehtivuspiirkonna selliselt, et reaalsed kõrvalekalded tööpunktiist peaksid olema väikesed [(1) p. 2.4.5].

Teatud juhtude saab asendada mittelineaarsed seosed lihtsustatud lineaarsega või päris välja jätta, kui piirata mudeli ja reaalse süsteemi töörežiimi sellisesse piirkonda, kus mittelineaarsuste mõju või asendamine lineaarsega tekitab lubatava väikese mudeli vea. Näiteks eeldades pendli liikumise nurka kirjelduses (2.5) alla 0,2 radiaani ja kasutades $\sin(\theta)$ asemel lihtsalt väikese nurga θ avaldist, saame $\pm 0,2$ radiaani piirides lineariseeritud mudeli vea alla 1 %-i. Sarnaselt saaks koosinuse sellisest väikesest nurgast asendada 1-ga.

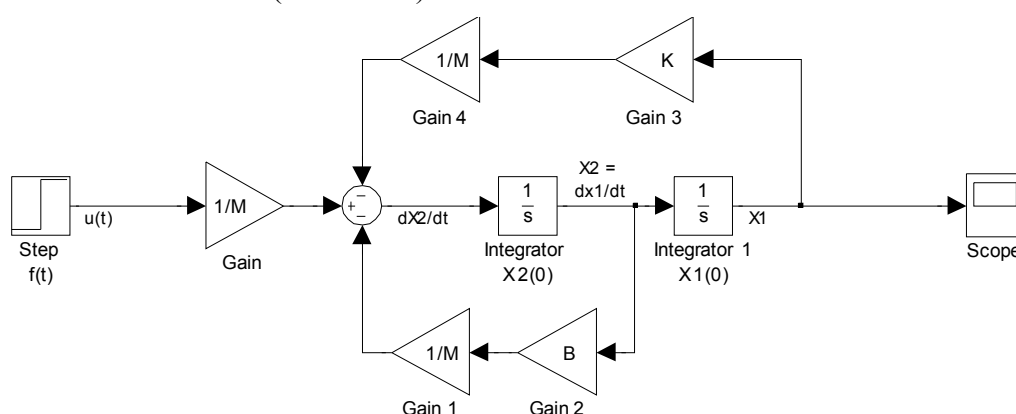
Paljude süsteemide käitumine on nende tuntuse tõttu võrdlemise hästi ette teada ja süsteemivõrrandeid tuletada pole vaja. Eeldades süsteemi tüüpilist käitumist, saab konkreetse mudeli parameetrid leida eksperimentaalsest katsest. Tavaliselt kasutatakse selleks süsteemi sisendis hüppe- või sagedussignaali ja registreeritud väljundi käitumise järgi leitakse eeldatavasse tüüpmodelisse väärtused. Lihtne on nii määrata järgmises peatükis tutvustatavaid tüüpmodelleid (vt. (3.1), (3.2)) koos hilistumisega või ilma. Reaalse süsteemi staatilise käitumise uurimisest leitakse staatilised ülekandetegurid. Eksperimentaalselt tuleb kontrollida ka võimalike mittelineaarsuste puudumist. Sellist mudeli identifitseerimist tuleb kasutada ka juhtudel, kus süsteemi kirjeldust seoste matemaatilise avaldamisega ei suudeta keerukuse tõttu teha või saadud süsteemivõrrandid on pruukimiseks liialt keerulised. Keerukamate identifitseerimismeetoditest saab täiendavalt lugeda nt [(10) pt.5., 6.].

2.2.2 Dünaamilise süsteemi simuleerimine MATLAB/Simulik-is

Sisuliselt on Simulink kõikvõimaliku funktsionaalsusega plokkide kogumik ja graafiline liides nendest plokkidest erinevate seostega süsteemide kokkupanemiseks.

Andmeid, mida plokkides kasutada soovitakse võivad olla sisestatud iga plokki dialoogiakna kaudu või olla sisestatud Matlabi muutujatena, mida nime järgi plokkides Matlabist üles leitakse. Simulink-is on LTI objektide esitamiseks „LTI System“ plokk, kuid saab kasutada ka eraldi ülekandefunktsiooni („Transfer Fcn“, „Zero-Pole“, „Discrete Transfer Fcn“, „Discrete Zero-Pole“ jt) ja olekumudeli („State-Space“, „Discrete State-Space“) plokkide. Kui on vaja kirjeldada ka mittelineaarsusi sisaldavaid mudeleid, tuleb süsteem kokku panna lineaarsete ja mittelineaarsete osade ühendamisega.

Näiteks saab avaldise (2.4) esitada ülekandefunktsiooni plokiga või olekuvõrrandist (2.8) koostatud olekumudeli plokiga, aga hilisemaks mittelineaarsuste täpsustumisel saab neid simulatsioonil lihtsasti lisada, kui see mudel on koostatud analoogselt plokkiskeemidele (Joonis 1.1) nagu näha järgneval skeemil. Olekumuutujate algolekud sisestatakse integraator plokkidesse. Simulink nimetab simulatsiooniskeeme (.mdl failid) modeliteks.



Joonis 2.7 Olekuvõrrandi simulatsiooniskeem

2.2.3 Alalisvoolumootori mudeli näide

Alalis-voolumootorid on juhtimissüsteemides laialdaselt kasutusel ja seetõttu on vajalik koostada nende matemaatiline mudel.

Üldiselt võib erinevaid alalisvoolumootoreid modelleerida üheselt, sest konstruktsioonierinevused magnetvoo tekitamisel selle konstantsust ei muuda.

Võõrergutusega alalisvoolumootori skeemi, kus püsiv magnetvoog tekitatakse ergutusmähisega, võib esitada järgnevalt (Joonis 2.8), kus

$i_a(t)$ on rootori (ankru-) ahela vool [A],

R_a on rootori (*armature*) ahela takistus [Ω],

L_a on rootori ahela induktiivsus [H],

$e_a(t)$ on rootori ahelale rakendatud pinge [V],

$e_b(t)$ on rootori ahelas indutseeritav vastu-elektromotoorjõud [V],

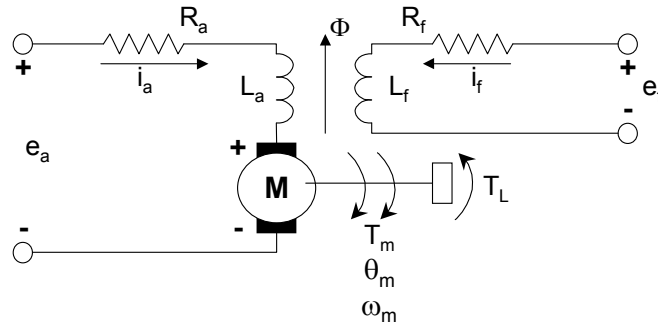
Φ on magnetvoog (*magnetic flux*) [Wb],

$T_m(t)$ on mootori pöördemoment (*torque*) [N.m],

$\theta_m(t)$ on mootori pöördenurk [rad],

$\omega_m(t)$ on mootori pöörlemiskiirus [rad /s],

$T_L(t)$ on koormuse jõumoment [N.m].



Joonis 2.8 Ergutusmähisega alalisvoolumootori mudeli skeem

Kui ergutusmähise pinge $e_f(t)$ on piisavalt kaua rakendatud, siis mähise vool $i_f(t)$ on konstantne ja magnetvoog Φ ning mootori jõumoment T_m on avaldatavad järgmiste seostena

$$\Phi(t) = K_f i_f(t) = K_f I_f = \text{konstant} \quad (2.55)$$

$$T_m(t) = K_m \Phi(t) i_a(t) = K_m K_f I_f i_a(t) = K_i i_a(t), \quad (2.56)$$

kus K_i on mootori ehitusest sõltuv jõumomendi konstant [N.m/A].

Tasakaaluvõrrandite (2.57), (2.58), (2.59), (2.60) esitamisel on näha, et $e_a(t)$ on kõikide mõjutuste põhjustajaks. Rootoriahela pinge tekitab selles ahelas voolu, mis omakorda määrab mootori jõumomendi ja sellega tekitab pöörlemise. Pöörlemiskiirusest sõltub rootoriahelas indutseeritav vastuelektromotoorjõud. Koormuse jõumoment tekib koormuseks oleva keha hõõrdejõu(-momendi) tõttu (nt. Coulomb'i hõõrdumine).

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t) = e_a(t) \quad (2.57)$$

ja

$$e_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_b \omega_m(t), \quad (2.58)$$

kus K_b on mootori vastu-elektromotoorjõu konstant [V/rad/s].

$$T_m(t) = K_i i_a(t), \quad (2.59)$$

$$J_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m(t)}{dt} + T_L(t) = T_m(t), \quad (2.60)$$

kus $J_m(t)$ on rootori inertsmoment (*inertia*) [kg.m²], [N.m.s²],
ja $B_m(t)$ on mootori hõõrdetegur (*viscous-friction coef.*) [N.m/rad/s].

Toodud seostega mudeli kasutamisel, tuleb siiski arvestada mootori reaalseste võimalustega. Mootoreid ei tohi kasutada kuitahes suurte pingetega (ülekuumenemine, läbipõlemine). Liiga väikese pinge/voolu juures jääb T_m staatilisest hõõrdemomendist

väiksemaks ning mootor ei käivitu. Magnetvälja küllastumise tõttu on mootoritel määratud ka maksimaalne T_m , mida on võimalik saavutada.

Mootori mudeli esitamiseks olekumudeli kujul tuleb kõik mitte-olekumuutujad esitada olekumuutujate kaudu. Valides olekumuutujateks $i_a(t)$, $\omega_m(t)$ ja $\theta_m(t)$ saame olekuvõrrandid maatrikskujul

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} T_L(t) \quad (2.61)$$

Olekumudeli (2.61) esimene rida esitab rootoriahela tasakaaluvõrrandit (2.57) ja vastu-elektromotoorjõu avaldist (2.58), teine rida pöördemomentide tasakaaluvõrrandit (2.60) ja mootori jõumomendi avaldist (2.59). Kolmas rida näitab tuletuslikku seost pöördenurga ja pöörlemiskiiruse vahel (vt ka (2.64)). Koormuse jõumoment $T_L(t)$ lisatakse teise sisendina, mida on võimalik interpreteerida olekumuutuja ω_m häiringuna.

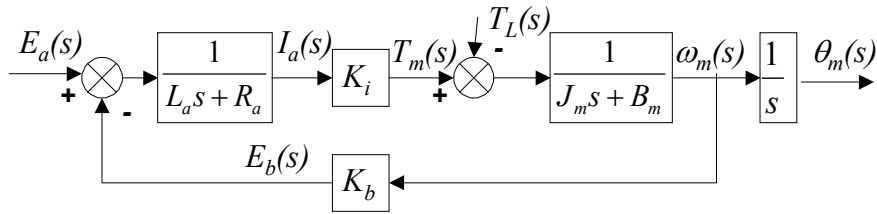
Teisendades tasakaaluvõrrandid ümber kujutiste valda (2.62), (2.63), (2.65), on ülevaatlik esitada mudel plokkskeemina (Joonis 2.9) ja saame avaldada ka vajaliku(d) ülekandefunktsiooni(d) (2.66).

$$\begin{aligned} L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) + E_b(s) &= E_a(s) \Rightarrow \\ I_a(s) &= \frac{1}{L_a s + R_a} (E_a(s) - E_b(s)) \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$E_b(s) = K_b \omega_m(s). \quad (2.63)$$

$$\omega_m(s) = s \theta_m(s). \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} J_m s \omega_m(s) + B_m \omega_m(s) &= K_i I_a(s) - T_L(s) \Rightarrow \\ \omega_m(s) &= \frac{1}{J_m s + B_m} (K_i I_a(s) - T_L(s)) \end{aligned} \quad (2.65)$$

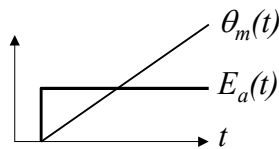


Joonis 2.9 Alalisvoolumootori mudel plokkskeemina

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^3 + (R_a J_m + B_m L_a) s^2 + (K_b K_i + R_a B_m) s} \quad T_L = 0 \quad (2.66)$$

Ülekandefunktsiooni ja plokkskeemi abil saab märgata olulisi mootori omadusi:

- Kordaja s saab tuua ülekandefunktsiooni nimetaja ette, mis näitab, et ülekandel pingelt pöördenurgale toimib mootor valdavalt nagu integreeriv seade (Joonis 2.10).



Joonis 2.10 Rootoriahela pinge ja pöördenurga seos

- Kuigi mootor on iseenesest avatud süsteem, on vastu-elektromotoorjõud nagu sisene tagasiside (elektriline hõõrdumine), mis stabiliseerib mootori tööd. Kui K_i ja K_b on SI ühikutes ($[N.m/A]$ ja $[V/rad/s]$), siis on need konstandid arvuliselt võrdsed.

3 Süsteemide analüüs

Kaasaegne automaatjuhtimissüsteemide matemaatiline kirjeldus võimaldab analüüsi ja sünteesi protseduurid realiseerida peamiselt arvutil, mida on antud materjali esitamisel üheks eesmärgiks võetud. Eelkõige on see vajalik mitme sisendiga ja mitme väljundiga (MIMO) süsteemide töörohket arvutuste puhul, milleks sobib kõige paremini olekumodelite põhine esitus. Antud peatükis leiavad käsitletud olulised klassikalistest sisend-väljund mudelitest lähtuvad analüüsi küsimused lõpetades olekumodelitega esitatud süsteemidega lisanduvate omadustega. Valdavalt on need lugejale teada süsteemiteooria kursusest ja leiavad siinkohal kordamist juhtimissüsteemidele vajalikest aspektidest.

Tuleks rõhutada, et siinkohal hinnatakse analüüsiga juhitava protsessi, automaatika seadmete või suletud süsteemi mudeli omadusi. See tähendab, et järeldused reaalse süsteemi kohta saavad olla nii õiged, kui õige on tema mudel.

Süsteemi soovitud käitumist määrates on AJS-l muidugi elementaarne, et see on stabiilne igas töörežiimis. Süsteem on stabiilne, kui igasuguste sisendite ja häiringute puudumisel, püsivad muutujad samadel püsiväärtustel (või suunduvad lõpliku ajaga sinna tagasi). Süsteem on ebastabiilne, kui tema muutujad kalduvad teoreetiliselt piiranguteta kõrvale algväärtustest. Reaalse süsteemi muutujad ei saa muidugi lõpmatult kasvada, vaid jõuavad teatud füüsikalise võimaliku piirini, mis on tingitud nt mehaanilistest mõõtmetest või jõuavad mittelineaarsesse piirkonda, kus lineaarne matemaatiline kirjeldus ei kehti või läheb midagi katki [(2)]. Juhitav protsess võib küll ilma juhtimiseta olla ebastabiilne, kuid õige tagasisidega saavutatakse stabiilne toimimine. Selle eelduseks peab aga protsess olema juhitud ja **jälgitav** (vt. p. 3.2). Lineaarsete süsteemide stabiilsuse määramise tingimusi on esitatud süsteemi omaväärtuste ja karakteristikute kaudu [(6)].

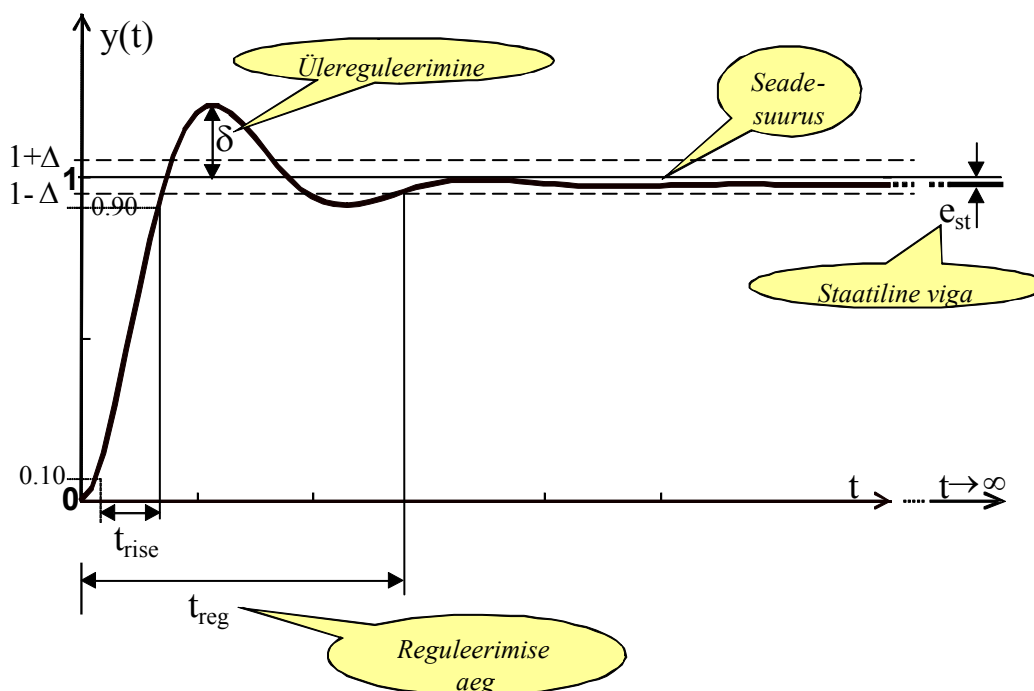
Automaatjuhtimissüsteemis on praktiliselt harva sisendsignaali täpselt ette teada ning seetõttu uuritakse analüüsil süsteemi käitumist tüüpiliste ja maksimaalselt võimalike signaalide¹ ja olekute jaoks, mis tavaolukorras võiksid ette tulla.

3.1 Siirde ja püsioleku omadused

Tähtsad automaatjuhtimissüsteemi omadused väljenduvad tema juhitud muutujate ajasõltuvusega (dünaamilistel) karakteristikutel (siiretel). Need peavad vastama soovitud käitumisele, ning selleks esitatakse kindlad kvaliteedinäitajad (vt Joonis 3.1). Kui protsessil või avatud süsteemis need nõuded täidetud ei ole, saab tagasisidestatud süsteemi sünteesiga sageli neid täita. Seadesuuruse lähedale soovitud täpsusega Δ kanalisse kahanemise siirdeprotsessi kestust (e reguleerimisaeg) peab jääma väiksemaks või võrdseks nõutuga. Kui juhitud muutuja ei jää püsiväärtuste väljakujunemisel soovitud väärtusele, mis sisendiga (seadesuurusega) peaks määratud olema, siis see erinevus soovitud on staatiline viga. Kuigi staatiline viga on seotud staatilise töörežiimiga, võib ka dünaamilise siirde lõpus seda kujutada. Staatiline viga (e. püsitalitlusviga [(11 lk 66)]) peab jääma väiksemaks lubatud erinevate (püsi- või nihke-) häiringute ja järgitavate seadesuuruste korral. Hüppelise häiringu või seadesuuruse muutusel tekkiv dünaamiline kõrvalekalle (siirde dünaamiline viga) peab jääma nõutud piiridesse. Lubatud maksimaalne ülereguleerimine antakse tavaliselt protsentides ja sellega on seotud ka siirde **võnkuvus** (kuidas võngete amplituud soovitud väheneb). Sellised nõuded moodustavad ühtlasi kõigile

¹ Tüüpilised testsignaalid on hüppesignaal, ajas lineaarselt kasvav signaal, impulsssignaal, siinuseline jms.

mõistetava kirjelduse (spetsifikatsiooni), mida süsteemi sünteesiga soovitakse saavutada.



Joonis 3.1 Normeeritud siirdeprotsess kvaliteedinäitajatega

Esitatakse veel integraalseid vea kriteeriume, mis hindavad veasignaali pinda. Sõltuvalt vea iseloomust esitatakse ISE (integraalne vea ruudu hinnang), IAE (integraalne vea absoluutväärtuse hinnang), ITAE (ajakaalutud IAE) või ITSE (ajakaalutud ISE) tüüpi hinnanguid.

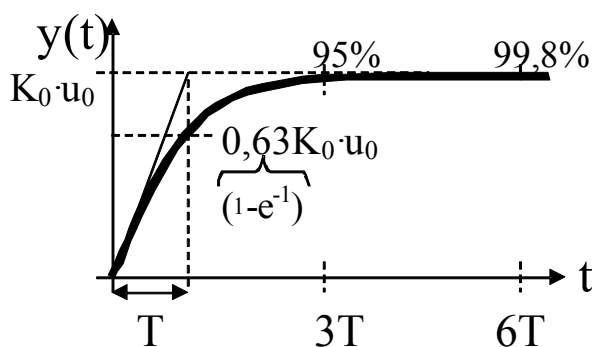
Lihtsatele tüüpilistele protsessidele (objektidele) ja süsteemi omadustele viitamiseks on väljakujunenud tüüpnimetused (vt. nt. [(11)]) ja järgud. Näiteks proportsionaalne P lüli või element (ainult ülekandetegur), integreeriv I lüli (teguriga integraator), diferentseeriv D lüli (teguriga tuletis), hilistus (transporthilistumine), esimest järku aperiiodiline (ühe stabiilse reaalse poolusega), teist järku võnkeli. Viimast nimetame siinkohal prototüüp elemendiks (ÜKF-ks) (vt.(3.2)), sest tema parameetrite kaudu on hea kirjeldada paljud soovitud siirde kvaliteedinäitajad. Nende elementide kombineeritud ühendamise saadakse esitada ja iseloomustada ka teisi vähem elementaarseid protsesse ja ka lihtsaid regulaatoreid.

Süsteemi tüübina (0, 1, 2, 3) mõistetakse veel seadesuurust esitava polünoomi astet, mille puhul selle järgimisel staatiline viga jääb mittenulliseks lõplikuks konstandiks. Nt hüppelise seadesuuruse (0 järku polünoomina esitatav, $r(t) = a \cdot 1(t)$) järgimisel jääb 0 tüüpi süsteemil (omab 0 integraatorit) sisse mittenulline staatiline viga. I järku nagu lineaarfunktsiooni ($r(t) = a \cdot t$) ja teist järku ($r(t) = a \cdot t^2$) seadesuuruse puhul peab süsteem sisaldama vastavalt ühe (tüüp 1) ja kaks (tüüp 2) puhast integraatorit, et staatiline viga lõplikuks jääks [(12)]. Nii saab väita ühikulise tagasiside ahela puhul, nagu Joonis 3.9 (vt üldistatud juhtu [(13 lk 180) 2006]). Kui süsteemi kontuuri võimenduse integraatorite arv (süsteemi tüüp) on suurem, kui seadesuuruse polünoomiaalne aste, siis läheb teoreetiliselt staatiline viga nulliks. Nt ühe või rohkema integraatoriga süsteem tagab hüppesignaali järgimise nullise staatilise veaga. Samuti esitatakse süsteemi tüüpi ka häiringusignaali poolt tekitatud staatilise vea kohta.

Esimest järku süsteemi (objekti) model on esitatav kujul ((3.1) ja tema siire hüppelisele sisendsignaalele u_0 on **Joonis 3.2**

$$T \frac{dy(t)}{dt} = K_0 \cdot u(t) - y(t) \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_0}{Ts + 1} \quad (3.1)$$

kus T on ajakonstant ja K_0 staatiline ülekandetegur.



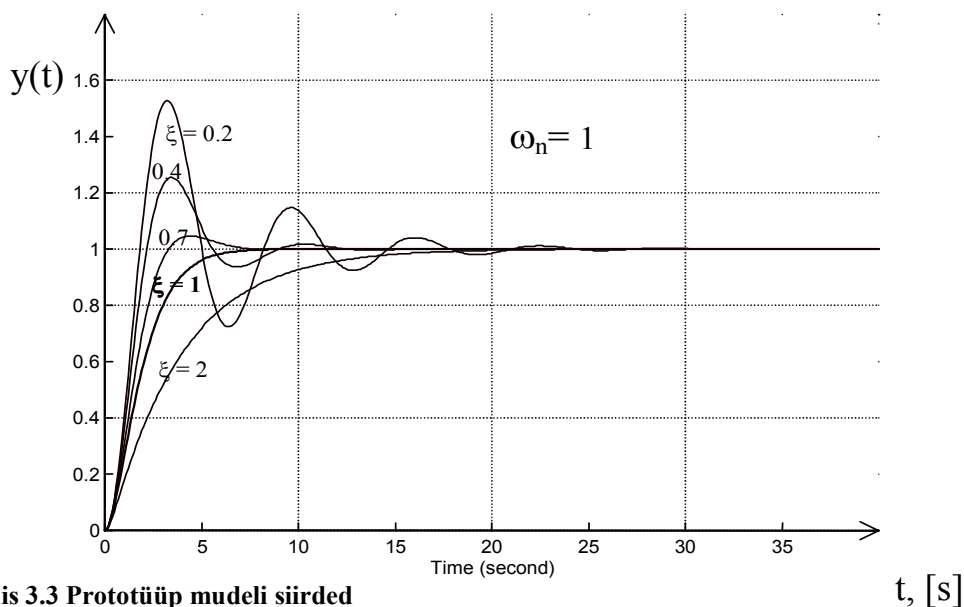
Joonis 3.2 Ajakonstant aperioidilise I järku tüüpmodeli siirdest

Sellisele kujule lihtsustatakse tihti mitmeid aperioidilise siirdega seadmete (nt andurid) esitus. Kusjuures modeli parameetrite määramine reaalse süsteemi katsest on lihtne, andes tööpiirkonnas sobiva sisendhüppe u_0 ja registreerides mõõteseadmetega väljundi siirde $y(t)$.

Teist järku süsteemide üldistatud kuju saab esitada normeeritud prototüüp modeliga:

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T\zeta \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \quad (3.2)$$

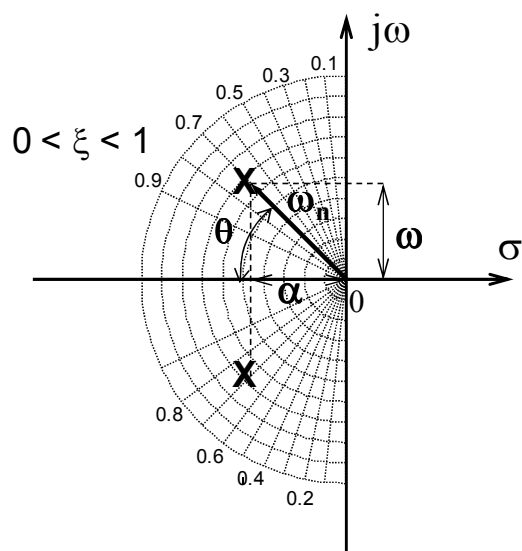
kus T on ajakonstant ($T=1/\omega_n$), ζ on sumbuvus ja staatiline ülekandetegur on 1.



Joonis 3.3 Prototüüp modeli siirdest

$t, [s]$

Prototüüpmodeli pooluste paigutus sõltuvalt ω_n -st ja ζ -st on järgneval joonisel..



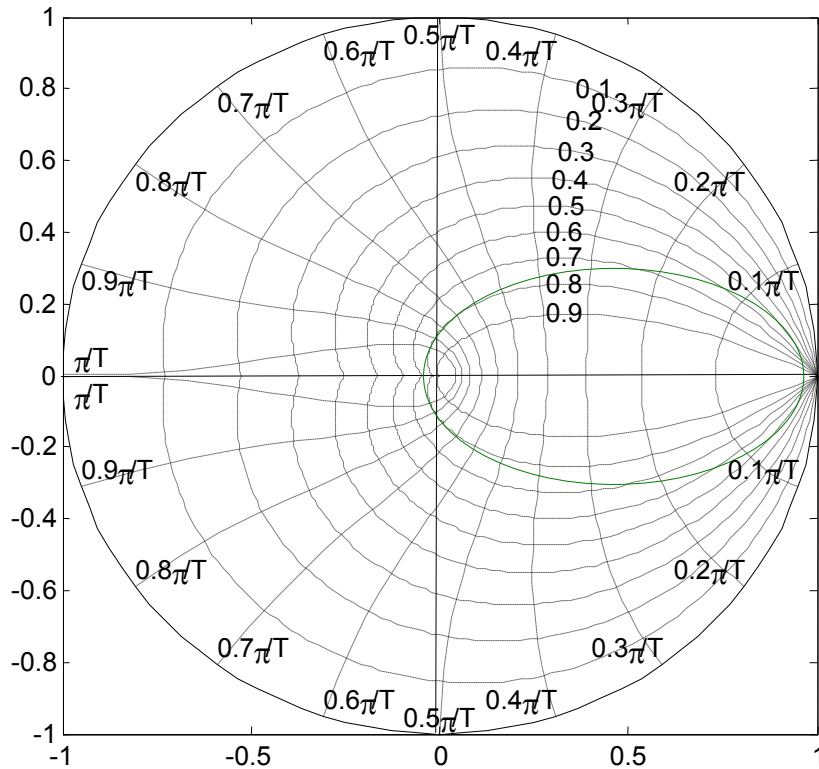
Joonis 3.4 Prototüüp model poolused

Kui sumbuvus läheb üheks või üle selle saadakse ilma imaginaarosata reaalsed poolused ja siire on ülesummutatult aeglane.

Praktikas jäävad mõistlikud sumbuvuse väärtused suletud süsteemi käitumise jaoks vahemikku 0.8 (c 2 % ülereguleerimine) kuni 0.4 (c 25% ülereguleerimine). Kusjuures tuleks tagada veidi alla soovitud täpsuskanali Δ jääv ülereguleerimine, millega kaasneb parim siirdeprotsessi kestus. Ligikaudse reguleerimisaja 5% täpsuse juures saab arvutada valemiga [(2) pt.5]:

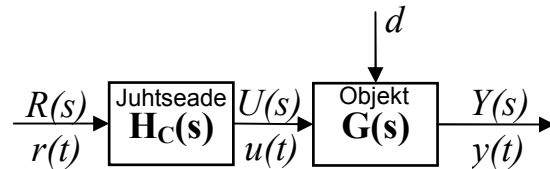
$$t_s \approx \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n} \quad 0 < \zeta < 1 \quad (3.3)$$

Süsteemide soovitud käitumine on otseselt seotud nende omaväärtustega. Iga omaväärtus mõjutab teatud määral süsteemi käitumisi. Siiretes omavad kõige suuremat mõju eelkõige kõige parempoolsem(ad) poolus(ed), mida nimetatakse **dominantseteks** [(1) p. 3.2.2]. Ülejäänud omaväärtuste mõju toimib siirde alghetketel ja on üldiselt lühiajaline. Soovitud käitumise määramiseks saab kasutada suletud süsteemi dominantsete pooluste valimist nt teist järku prototüüp model abiga. Diskreetaja süsteemil paiknevad sellised mõistliku sumbuvusega poolused lõigu 1...0 ümbrusesse ühikringi sees. Joonis 3.5 on kujutatud punktiirjoonega vastavad sumbuvuse (0.1...0.9) ja siirete kiirust määravad piirkonnad.



Joonis 3.5 Stabiilsete pooluste piirkond diskreetajate süsteemil (Z-tasapinnal)

Sünteesi järgne lahenduse analüüs peab alati sisaldama häiringute mõju hindamist. Samas on häiringute kõrvaldamise võimet võimalik ette hinnata juba võimalikke juhtimislahendusi kaaludes.



Joonis 3.6 Avatud struktuuriga automaatjuhtimissüsteem häiringuga d

Kui võtta Joonis 3.6 häiring mõjuma objekti sisendisse (nt taandatud sisendühikutele), siis võime kirjutada juhitava väljundi ülekandfunktsioonide kaudu järgnevalt:

$$Y(s) = H_c(s)G(s)R(s) + G(s)d(s) \quad (3.4)$$

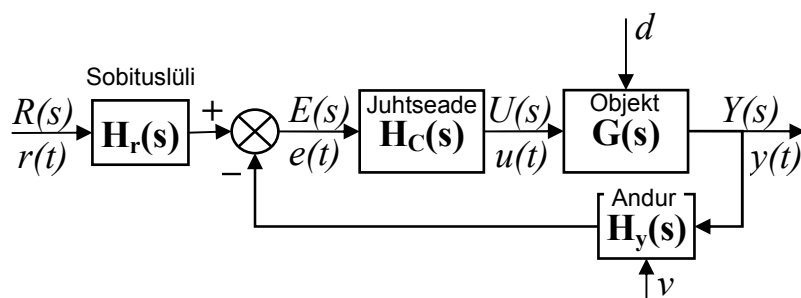
Vahe soovitud väärtuse r ja tegeliku väljundi y vahel ehk viga e avaldub

$$\begin{aligned} E(s) &= R - Y = R(s) - (H_c(s)G(s)R(s) + G(s)d(s)) = \\ &= (1 - H_c(s)G(s))R(s) - G(s)d(s) = (1 - T_o(s))R(s) - G(s)d(s) \end{aligned} \quad (3.5)$$

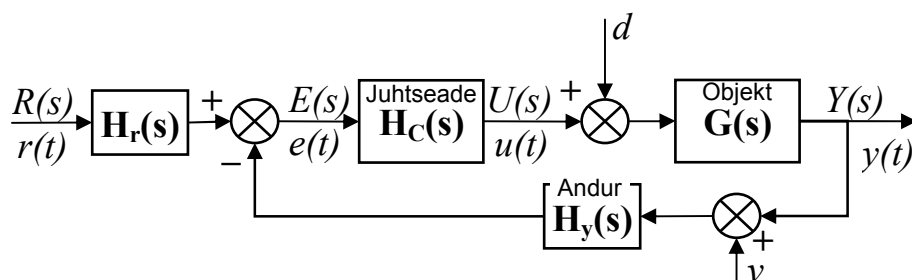
Viimases valemis tähistab $T_o(s)$ avatud süsteemi ülekannet.

Täpsustades analoogselt Joonis 3.7 suletud süsteemile mõjuvad häiringud, saame esitada selle skeemi kujul Joonis 3.8 ja esitada juhitava väljundi avaldise:

$$Y(s) = \frac{H_r(s)H_c(s)G(s)}{1 + H_y(s)H_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + H_y(s)H_c(s)G(s)}d(s) - \frac{H_y(s)H_c(s)G(s)}{1 + H_y(s)H_c(s)G(s)}v(s) \quad (3.6)$$

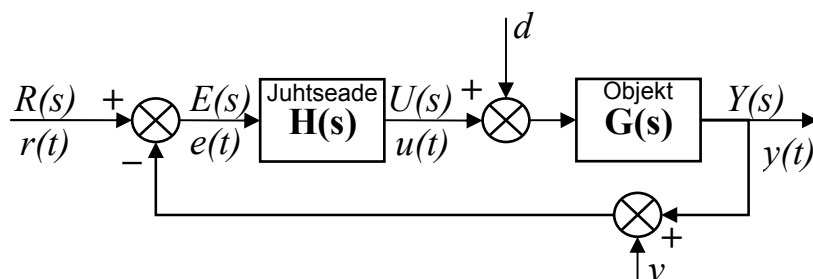


Joonis 3.7 Tagasisidestatud automaatjuhtimissüsteem häiringutega



Joonis 3.8 Tagasisidestatud AJS sisenditesse taandatud häiringutega

Teisendame H_r -ga seadesuuruse võrdlussõlme jaoks samadesse ühikutesse anduri poolt edastatava signaaliga (nt V) ja eeldame, et anduri saab valida piisavalt kiire dünaamikaga st dünaamikat arvestamata muutub H_y konstandiks ning võtame suhte ühikuliseks ($H_r = H_y$). Nii saab tagasisidestatud süsteemi avaldada veel lihtsamalt [(13 lk 170) 2006]:



Joonis 3.9 Lihtsustustega tagasisidestatud AJS häiringutega

Viimasel skeemil toodud regulaatori ülekandfunktsioon H sisaldab ka teisendust H_r . Avaldades uuesti juhitava väljundi avaldise saame:

$$Y(s) = \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}d(s) - \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)}v(s) \quad (3.7)$$

Viimase avaldise lihtsustamiseks defineeritakse tundlikkuse funktsioon S

$$S(s) = \frac{1}{1 + H(s)G(s)} \quad (3.8)$$

ja täiend tundlikkus (*complementary sensitivity*) T

$$T(s) = 1 - S = \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad (3.9)$$

Neid kasutades avaldub väljund:

$$Y(s) = TR(s) + SG(s)d(s) - Tv(s) \quad (3.10)$$

Viimasest avaldisest saab näha, et S võiks seadesuuruse täpseks järgimiseks ja protsessi häiringute mahasurumiseks olla võimalikult väike (vajalikus tööpiirkonnas). Tihti kasutatakse siinkohal veel suletud süsteemi kontuuri võimendust $L(s)$, mis vastavalt Joonis 3.9 võrdub $H(s)G(s)$ ja peaks olema võimalikult suur. Konstantsete häiringute poolt põhjustatud viga saab tagasisidega vähendada tundlikkuse S korda, mis on arvutatud staatilise režiimi jaoks ($s \rightarrow 0$). Sarnaselt saab näidata ka et objekti ülekandeteguri muutusest tingitud viga on tagasisidestatud süsteemis $S(s)$ korda väiksem kui avatud süsteemis [(13 lk 173) 2006].

Vaadates viimast liiget avaldises (3.10) tekib aga konflikt väikse tundlikkuse ja tagasisideahela häiringu mõju vahel (T võiks selle vähendamiseks ka väike olla). Sellist dilemmat saab lahendada kasutades S ja T muutmist erinevate sagedustepiirkondade jaoks erinevaks. Nimelt on protsessi häiringute ja seadesuuruste energia suurem pigem mingist sagedusest ω_c allpool piirkonnas. Vastupidi anduri saab disainida selliselt, et anduri häiretundlikkus on väike ω_c -st allpool. Selliselt tuleb süsteemi sünteesil tagada allpool ω_c väike S ja suur T ning vastupidi suurematel sagedustel.

Põhjalikemate analüüside jaoks defineeritakse veel mitmeid teisi tundlikkuse variante.

Ühe näitena suletud süsteemi võimenduse suuruse mõjust häiringu tõttu jäävale staatilisele veale võib võtta pöördliikumise suundantenni soovitud nurga alla pöördumise juhtimise: Antenni mudel on antud diferentsiaalvõrrandiga

$$J \cdot \ddot{\theta}(t) + B_s \cdot \dot{\theta}(t) = M(t) \quad (3.11)$$

kus θ on juhitud antenni nurk [rad],

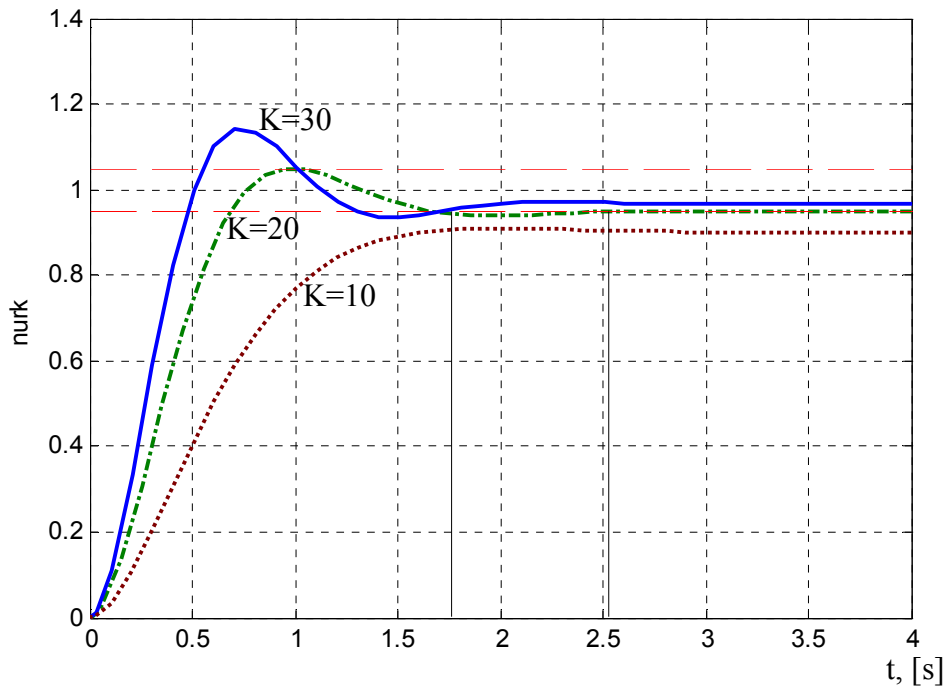
J on kõikide pöörlevate osade inertsmoment [kg m^2] ($J=10$),

B_s on igasuguste sumbumiste summaarne koefitsient [$\text{kg m}^2/\text{s}$] ($B_s=46$),

M on mootori poolt arendatav moment [$\text{kg m}^2/\text{s}^2$], mis on lihtsustatult võrdeline antenni pöörava mootorile rakendatud pingega $U(t)$ [V]; $M = k_m \cdot U(t)$.

k_m on konkreetsele mootorile iseloomulik parameeter ($k_m=7,78$).

Kasutades ühikulise tagasisidega skeemi (Joonis 3.9), kus juhtseadmeks on üks ülekandetegur K , seadesuuruseks nurk 1 radiaan ja sisendisse mõjub ühikuline häiring, saame süsteemilt järgneva siirde.



Joonis 3.10 Antenni nurga siire erinevate K väärtuste juures

Eelolevalt jooniselt on näha, et väiksema K väärtuse juures jääb staatiline viga liiga suureks ja siire ei jõua nõutud täpsusega ($\pm 5\%$) kanalisse (punase joonega). K väärtusel 20 jõuab siire napilt kanali piiri peale, kuid selleks kulub rohkem aega, kui suurima K väärtuse juures. Suurima K väärtuse ($K=30$) juures on sumbuvus kehvem ja ülereguleerimine on läinud suuremaks, kui 5%-i, kuid sellega võib veel sellise ülesande juures rahule jääda.

3.2 Juhitavus, jälgitavus

Süsteemi nimetatakse juhitaavaks, kui piiramata sisendtoimete (juhttoimete) abil on lõpliku aja jooksul võimalik viia süsteem mingist algolekust mõnda teise lõppolekusse. Täielik juhitaavus on olekumudeli põhiste sünteesimeetodite lahenduvuse üks tavalisi vajalikke tingimusi. Kui matemaatiline mudel ei ole juhitaav (vt. määramise tingimusi [(6)]), võib reaalse protsessi juhtimine olla ikkagi võimalik, kui mudelist on mingil põhjusel teatud seosed välja jäänud või viitab see sellele, et protsessi vajalikuks mõjutamiseks vajab reaalne süsteem täiendavate seadmete (täiturseadmete) kasutuselevõtmist (lisisisendite tekitamist).

Süsteemi nimetatakse jälgitavaks, kui lõpliku aja jooksul on võimalik, väljundite ja sisendite väärtusi teades, leida tema olekute väärtused. Jälgitavuse omaduse puudumine mudelis võib reaalselt tähendada seda, et süsteem vajaks täiendavate andurite lisamist, mille informatsiooni abil varjatud olekuid oleks võimalik kasvõi kaudselt (teiste olekute, väljundite kaudu) hinnata.

3.3 Analüüs Matlabis ja diskreetimissammu valik

Matlabis on väga korralik kogum funktsioone ja utiliite, millega saab sisestatud süsteemide omadusi hinnata. Näiteks mõned olulisemad, mida järgnevates osades kasutatakse:

eig – süsteemi omaväärtuste leidmine,

roots – polünoomi nullkohtade arvutamine,
ctrb, obsv – juhitavuse ja jälgitavuse maatriksi leidmine,
rank – maatriksi astaku arvutamine.

LTI mudeliga sisestatud süsteemi erinevaid karakteristikuid (siirded, sagedus- jm) saab vaadata Matlabi graafilise tööriistaga LTIviewer [Nise 2008 App. D]. Kui on vaja tulemusi arvulisel kujul, saab erinevate süsteemide siirdeid arvutada funktsioonidega step, feedback, lsim, jt [(2), (3)].

Pidevaja mudelile vastava diskreetaja süsteemi mudeli leidmisel tuleb otsustada missuguse suurusega diskreetimise takt valida. Sellekohaseid praktilisele pruukimisele orienteeritud soovitusi on erinevaid, kuid suurusjärgus 2..3 takti peaks mahtuma soovitud siirde tõusuaja (esifrondi kestuse) sisse. Seostega mitmemõõtmeliste protsesside puhul võiks taktide arvu suurendada olekute arv korda ja lähtuda ka väikseimast reguleerimisajast. Mida väiksem on diskreetimise takt, seda lähedasem tuleb diskreetaja süsteemi käitumine pidevaja süsteemiga, aga realiseerimisele mõeldes, ei ole mõtet takti pikkuse vähendamisega üle ka pingutada.

4 Automaatjuhtimissüsteemide sünteesimeetodid

4.1 Klassikalised meetodid (SISO)

On teada, et tagasisidestamisega saab muuta süsteemi käitumist paremaks (nt kiiremaks, täpsemaks), aga ebaõnnestunud lahenduse puhul või juhtuda ka, et muudetakse süsteem ebastabiilseks (eriti kaasub see olemuselt kõrgemat järku objektidega, millel tekib probleeme siirde võnkuvusega). Väikese staatilise vea ja siirde omaduste vaheline konflikt on paljudel juhtudel sünteesi oluline probleem.

Eespool näidatud kõige algsem, proportsionaalne reguleerimisalgoritm omab võimet kiirendada süsteemi käitumist. Kui juhttoime on lineaarselt proportsionaalne veasignaali ($U(t)=K_p e(t)$), siis nimetatakse ülesehitust **proportsionaalseks tagasisideks** (juhtseadet lihtsalt ka **P regulaatoriks**). Sellise ühe teguri K_p muutmisega saab häälestada siirde kiiruslikke omadusi, aga ei saa juhtida võnkuvust. Staatilise vea vähendamiseks kogu kontuuri võimenduse tõstmisel regulaatori teguriga võib siirde sumbuvus minna seetõttu lubamatult väikeseks. Nimetatud puuduste kõrvaldamiseks toodetakse P regulaator koos integraalse ja tuletusliku lisakomponendiga ning saadakse klassikaline enamlevinud regulaatorialgoritm PID (vt. (4.1) ja ajaparametrite kaudu esitatud (4.2)).

$$u(t) = \underset{\text{P}}{K_p} \cdot e(t) + \underset{\text{I}}{K_i} \int e(t) dt + \underset{\text{D}}{K_d} \frac{de(t)}{dt} \quad (4.1)$$

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (4.2)$$

Kõik komponendid ei pea olema korraga töölerakendatud, kuid D komponenti kasutatakse alati koos teistega. Integraalne komponent võib töötada ka üksinda genereerides juhttoime, mis on proportsionaalne vea integraaliga, kuid sageli kasutatakse teda siiski teistega koos (PI, PID), et kõrvaldada staatilist viga. Kahjuks kaasneb sellise hea omadusega ka siirde võnkuvust suurendav toime. Seetõttu tuleb häälestamisel leida kompromiss sobiva siirde koondumise kiiruse ja tekkivate võnkumiste vahel. Siirde kiiruslike omaduste (ka sumbuvuse) parandamiseks võetakse vajadusel kasutusele ka D komponent. Illustreerivalt võib öelda, et juhttoime moodustub vea olevikust (hetkeväärtus, P komp), minevikust (I komp.) ja tulevikust (D komponent). Selle pealtnäha lihtsa algoritmi häälestamiseks, digitaalseadmes realiseerimiseks ja täiustamiseks on aastakümnete jooksul arendatud väga palju soovitusi, meetodeid ja lahendusi, mida antud materjal ei pea, järgnevatele õppeainetele toetudes, vajalikuks esitada (vt. täienduseks nt [(14)], [(11)], [(2) pt. 10]). PID regulaatori kasutamise näide varem viidatud termilise objektiga on Lisas 1. Vahest nimetatakse regulaatoreid ka **kompensaatoriteks** [(1) p. 1.3.5].

Analoogsed PD ja PI tagasisided tekivad ka MIMO süsteemide sünteesides, mida kirjeldab järgnev alapunkt.

MATLAB-i CSTb sisaldab **SISO Design Tool** nimelist graafilise kasutajaliidesega vahendit, millega [Xue 2002 pt. 6.5] on hea katsetada erinevate (kaskaadis, jadamsi) kompensaatorite häälestust antud mudeliga juhtimisobjektile. Peamiseks tulemuse hindamiseks pakutakse seal juurhodograafi ja Bode sageduskarakteristikute pilti. Kompensaatoreid saab häälestada paigutades ja

nihutades nulle ning pooluseid (*Phase-Lead*, *Phase-Lag*) sobivatele kohtadele. Muutuse mõju kajastatakse kohe karakteristikute muutusena.

Otse pöördmudelitest arvatud suletud süsteemi soovitud prototüübilist toimimist tagav kompensator („*Model Following Controller*“) on arvutatav vaid minimaalfaasiga stabiilsele mudelile, sest vastasel korral tekkiva mittestabiilse kontrolleri pooluse väljajätmise mitteminimaalfaasi nulliga ei ole praktikas lubatav [Xue 2002 pt. 6.4.2]. Sarnane lubamatu väljajätmine tekib mittestabiilse mudeli puhul.

4.2 Süntees olekuruumis

Olekumudeli abil automaatjuhtimissüsteemide sünteesi meetodeid kutsutakse nn. kaasaegseteks, kusjuures on oleku ja väljundi järgi tagasiside kasutamine olekumudeli peal paljuski klassikaliste SISO juhtimiskontuuride üldistatud variant.

Kõigepealt tuuakse käesolevas punktis põhilised juhtimissüsteemide struktuursed ülesehitused, mille puhul süntees on võrdlemisi lihtsalt realiseeritav ja siis esitatakse vajalikud sünteesimeetodid.

Edaspidi kasutatav LTI juhitav objekt omab üldisel kujul n olekut, r sisendit ja q väljundit ning on pidevaja olekumudeli esituses

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU & A_{n \times n}, B_{n \times r} \\ Y &= CX & C_{q \times n}\end{aligned}\quad (4.3)$$

Analoogselt diskreetaja objekt on kujul

$$\begin{aligned}X(k+1) &= A_d X(k) + B_d U(k) & A_{d \, n \times n}, B_{d \, n \times r} \\ Y(k) &= CX(k) & C_{q \times n}\end{aligned}\quad (4.4)$$

Arvestades asjaolu, et sisendite vektor (sisendvektor) U , olekute vektor (olekuvektor) X ja väljundite vektor (väljundvektor) Y on alati ajasõltuvusega muutujate vektorid, on kirja pildi lühendamiseks jäetud pidevajas ajasõltuvus väljendamatuna. Diskreetaja variandi eristamiseks on see takti tähisena säilitatud.

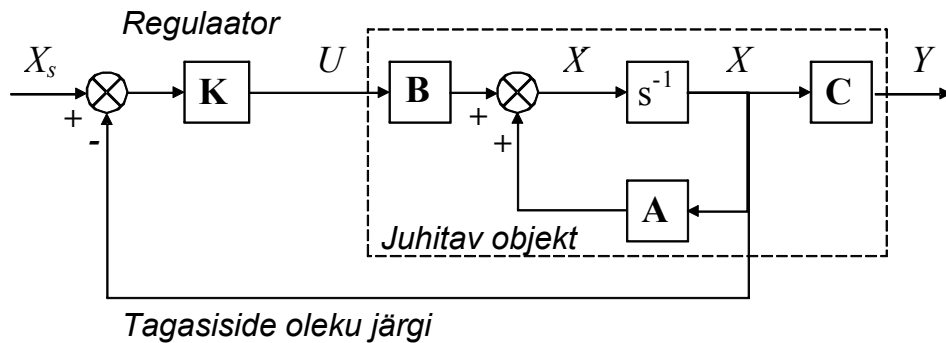
Automaatjuhtimissüsteemis, kus tagasiside võetakse olekuvektori järgi (Joonis 4.1), on pidev juhttoime esitatav kujul

$$U = K(X_s - X) \quad K_{r \times n} \quad (4.5)$$

ja diskreetaja süsteemis kujul

$$U(k) = K_d (X_s(k) - X(k)) \quad K_{d \, r \times n} \quad (4.6)$$

K ja K_d on siin olekuregulaatori ülekandetegurite maatriks. Sellise süsteemi eesmärgiks on viia olekud mitesobivast algolekust piisava kiirusega soovitud lõppolekusse X_s . Sageli vaadeldakse olekuregulaatori juhtu, kus soovitud lõppolek on nulline ($X_s=0$) ja mittenulline algolek $X(0)$ põhjustatud väliste häiringute poolt. Eelkõige kaasneb see olekumudelite puhul, kus olekumuutujad esitavadki kõrvalekaldeid soovitud nullisest olekust.



Joonis 4.1 Olekutagasisidega juhtimissüsteem

Olekuregulaatoriga suletud süsteemi vabaliikumise võrrand on pideval juhul järgmine

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BK(X_s - X) \\ X_s &= 0 \\ \dot{X} &= (A - BK)X\end{aligned}\tag{4.7}$$

Suletud süsteemi karakteristik polünoom avaldub pideval juhul

$$\det(sI - A + BK)\tag{4.8}$$

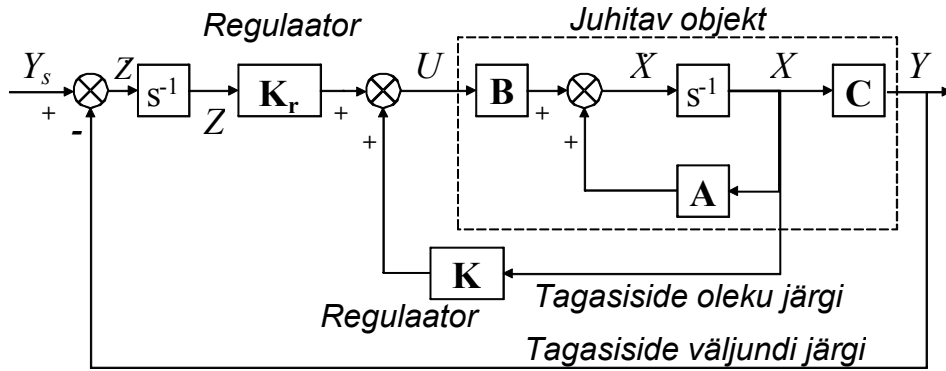
ja diskreetsel juhul

$$\det(zI - A_d + B_d K_d).\tag{4.9}$$

Olekuregulaatori maatriksi arvutamise lihtsamaid võimalusi kirjeldatakse järgmistes alapunktides.

Ainult statsionaarse olekutagasisidega juhtimissüsteem sobib üldiselt vaid ülesannetes, kus seadesuuruseks on nulline lõppolek ja ajutised häiringud tekitavad mittenulliseid olekuid. Kui juhitav objekt sisaldab piisavalt integraatoreid, on võimalik ka mittenullise seadesuuruse saavutamine; vastasel korral tekivad staatilised vead. Lisades täiendavaid integraatoreid sisaldavaid tagasiside ahelaid (analoogne klassikalise PI-ga) saab staatilise vea probleemi leevendada, aga sellise lihtsustatud lahenduse kasutatavus on piiratud. Kuna olekumodelis on vähemalt osad olekumuutujad tihti valitud üksteise tuletisena, siis tekitab olekutagasisidega struktuur kaudselt klassikalise PD regulaatoriga analoogseid kontuure.

Tükati konstantsete signaalidest koosneva seadesuuruse Y_s järgimiseks ja püsivate häiringute mõju elimineerimiseks, koostatakse täiendava integraalse tagasisidega järgivisüsteem (*servo system*) (Joonis 4.2).



Joonis 4.2 Pidevaja järgivsüsteem

Järgivsüsteemi eesmärgiks on tagada väljundi asümptootiline kokkulangevus seadesuurusega

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = Y_s(t). \quad (4.10)$$

Selliselte saab teatud olekuid väljunditeks organiseerides (mõõtes, hinnates) juhtida neid soovitud lõppolekutesse, kusjuures integraalne tagasiside tagab süsteemile parema häirekindluse ja hea staatilise täpsuse, kui objektidel endal integreerivaid omadusi pole.

Kasutades abimuutujat Z avaldub juhtoime kujul

$$U = KX + K_r Z \quad (4.11)$$

kus

$$\dot{Z} = Y_s - Y = Y_s - CX. \quad (4.12)$$

Laiendatud olekuektoriga süsteemi võib avaldada

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}} &= \tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B}U + \tilde{I}Y_s, \\ Y &= \tilde{C}\tilde{X} \end{aligned} \quad (4.13)$$

kus

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= [C \quad 0] \end{aligned}$$

Juhtoime laiendatud olekuektoriga kaudu on avaldatav kujul

$$U = -\tilde{K}\tilde{X}, \quad \tilde{K} = [-K \quad -K_r]. \quad (4.14)$$

Esitades laiendatud süsteemi hetkeväärtuste ja staatiliste lõppväärtuste ($t = \infty$) vahega ehk veavektoritega X_e ja U_e , teisendatakse järgimisülesanne nullise lõppolekuga (nullise veaga) olekuregulaatori sünteesi ülesandeks. Eeldades seadesuuruse konstantsust kirjeldab omaväärtustega määratud suletud süsteemi vea vabaliikumist võrrand

$$\dot{\tilde{X}}_e = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})\tilde{X}_e. \quad (4.15)$$

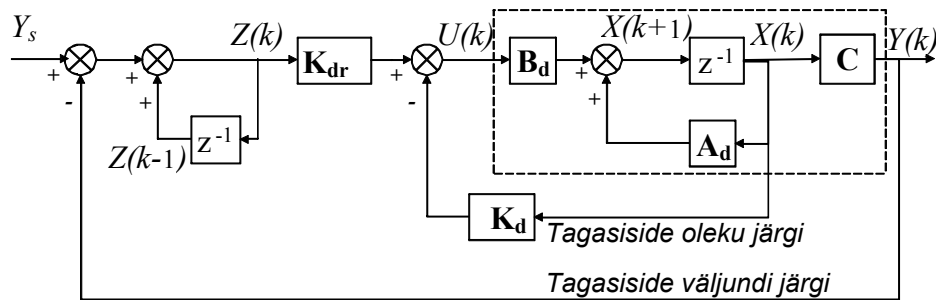
Eelnev võrrand on samane olekuregulaatoriga süsteemi vabaliikumise kirjeldusega (4.7), mistõttu on järgivsüsteemi süntees realiseeritav samade võtetega. Erinevus on

vaid süsteemi järgus, mis nüüd on q võrra suurem. Sünteesil eksisteerib lahend, kui laiendatud olekuvektoriga süsteem on täielikult juhitav (eeldusel et juhtimisobjekt on juhitav). Seda saab lihtsalt kontrollida ka süsteemi staatilisi lõppväärtusi määrava maatriksi P astaku järgi

$$\begin{bmatrix} X(\infty) \\ U(\infty) \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ Y_s \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Kui P astak = $n+q$, on süsteem juhitav. See tingimus saab olla täidetud ainult juhul kui objekti juhitavate väljundite arv ei ole suurem kui sisendite arv [D'Azzo].

Diskreetaja järgivsüsteemi struktuur erineb pidevast laiendatud süsteemi maatriksite sisu poolest, mis on tingitud summa kasutamisega „integraalses“ osas.



Joonis 4.3 Diskreetaja järgivsüsteem

Kasutades abimuutujat $Z(k)$ avaldub diskreetaja järgivsüsteemi juhttoime kujul

$$U(k) = -K_d X(k) + K_{dr} Z(k) \quad (4.17)$$

kus

$$Z(k) = Z(k-1) + Y_s(k) - Y(k) = Z(k-1) + Y_s(k) - CX(k). \quad (4.18)$$

Avaldades $Z(k+1)$, saab laiendatud olekuvektoriga süsteemi esitada kujul

$$\tilde{X}(k+1) = \tilde{A}_d \tilde{X}(k) + \tilde{B}_d U(k) + \tilde{I} Y_s. \quad (4.19)$$

kus

$$\tilde{X}(k+1) = \begin{bmatrix} X(k+1) \\ Z(k+1) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ -CA_d & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} X(k) \\ Z(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_d \\ -CB_d \end{bmatrix}, \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Juhttoime laiendatud olekuvektori kaudu on avaldatav kujul

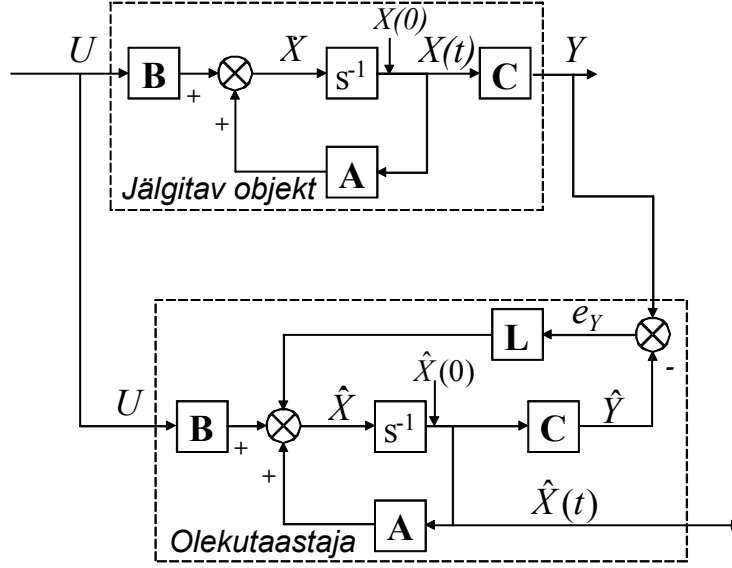
$$U(k) = -\tilde{K}_d \tilde{X}(k), \quad \tilde{K}_d = [K_d \mid -K_{dr}]. \quad (4.20)$$

ja suletud süsteemi vabaliikumist, mis on määratud omaväärtustega, kirjeldab võrrand

$$\tilde{X}(k+1) = (\tilde{A}_d - \tilde{B}_d \tilde{K}_d) \tilde{X}(k). \quad (4.21)$$

Järgivsüsteemi struktuuril on olekuvektori seadesuurused sisuliselt nullised v.a. C maatriksiga väljunditeks mõõdetud olekute jaoks. Sellega võib kaasneda ka mittesoovitav nähtus, kus siirde alguses, kui integraalne tagasiside pole veel jõudnud piisavalt mõjuda, suunab olekutagasiside ahel kõiki olekuid asjatult nulliste lõppolekute poole.

Kui olekuvektor pole juhtimiseks kättesaadav, kasutatakse selle hindamiseks **olekutaastajat** (Joonis 4.4).



Joonis 4.4 Juhtimisobjekt koos olekutaastajaga

Olekuvektori hinnangu $\hat{X}(t)$ ja tegeliku oleku vahe läheneb asümptootiliselt nullile.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{X}(t) - X(t)] = 0 \quad (4.22)$$

Statsionaarse, lineaarse süsteemi olekutaastaja olekuvõrrandid

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= A\hat{X}(t) + BU(t) + Le_Y(t) \\ e_Y(t) &= Y(t) - \hat{Y}(t) = Y(t) - C\hat{X}(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

ehk

$$\dot{\hat{X}}(t) = (A - LC)\hat{X}(t) + BU(t) + LY(t) \quad (4.24)$$

Olekutaastamise vea dünaamikat kirjeldab võrrand

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) - \dot{X}(t) &= (A - LC)(\hat{X}(t) - X(t)) \\ \dot{e}_{\hat{X}} &= (A - LC) \cdot e_{\hat{X}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Olekutaastaja sisemise tagasiside maatriksi L arvutamise lihtsamaid võimalusi kirjeldatakse järgmistes alapunktides. Kuna olekutaastajat on vaja eelkõige olekutagasiside info saamiseks, siis sünteesitakse ja kasutatakse olekutaastajat tavaliselt koos olekuregulaatoriga (vt Joonis 4.6).

4.2.1 Modaaljuhtimise süntees

Erinevalt klassikalistest juhtimissüsteemi sünteesi meetoditest, kus SISO süsteemi regulaator (kompensaator) tagab suletud süsteemi sobiva sumbuuse ja kiirusega dominantsed poolused, kasutatakse **modaalsel** sünteesil kõikide suletud süsteemi pooluste paigutamist sobivasse kohta. Selleks valitakse modaalsel juhtimissüsteemi

sünteesil suletud süsteemi soovitud omaväärtused $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ st. nõutav karakteristlik polünoom on kujul [(12), (15)]

$$\Phi(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0 = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) \quad (4.26)$$

Nõutud pooluste valik on sageli kompromiss suletud süsteemi olekusiirete kiiruse ja rakendamisel tekkiva juhttoimete suuruse ning häiringute mõjude väiksuse vahel. Kõrgemat järku objektide puhul on soovitatav suletud süsteemi pooluste valikul katsetada kahe kaaskomplekse dominantse pooluse kasutamist koos lisanduvate mittedominantsete poolustega [(1) p. 5.4.8, (3 lk 239)]

Diskreetaja süsteemidele ainuomane on lõpliku kestvusega olekusiirde saamine, kui suletud süsteemi poolused on valitud kõik nullid st $\Phi(z) = z^n$. Ühe sisendiga süsteemis jõuab olekusiire sellisel valikul lõppolekusse (nulli) täpselt n taktiga. Kui diskreetimistakt T on väike, kaasneb lühikese siirdeaajaga (nT) väga suur juhttoime amplituud, mis reaalses süsteemis ei pruugi olla võimalik saavutada ning juhttoime takistumisel maksimaalsel piiril teoreetiline siirdeaeg ei ole enam tagatud. Kui sisendite arv $r > 1$, mis annab suuremad võimalused juhtimiseks, on teoreetiliselt võimalik saavutada ka n taktist kiiremat siiret [Ogata, Diskr.95 lk 418].

Olekuregulaatori K (või K_d) maatriks saadakse võrrandsüsteemi

$$\det(sI - A + BK) = \Phi(s) \quad (4.27)$$

lahendamisel, mis diskreetsel juhul on kujul

$$\det(zI - A_d + B_d K_d) = \Phi(z) \quad (4.28)$$

kus on n võrrandit ja $r \times n$ tundmatut K maatriksi elementi. Lahend, mis sõltub valitud $\Phi(s)$ -st ($\Phi(z)$ -st), on leitav, kui objekt on täielikult juhitav.

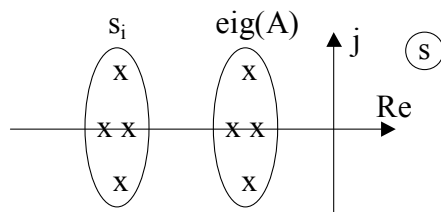
Ühe sisendiga süsteemi puhul on üks lihtne võimalus leida K maatriks tõestatav kanoonilise juhitava olekumudeli esituse jaoks, mille puhul K maatriksi iga element

$$k_{i+1} = \alpha_i - a_i, \quad i = 0, 1, \dots, (n-1). \quad (4.29)$$

Kui juhtimiseks kasutatavate sisendite arv $r > 1$, on tundmatuid rohkem, kui võrrandeid, mis lubab $(r-1) \times n$ tundmatut vabalt valida. Sellist vabadust kasutatakse mitmetes meetodi arendustes suletud süsteemile täiendavate tingimuste esitamiseks. Näiteks MATLAB-is modaalsel olekuregulaatori sünteesi realiseeriv funktsioon `place` sünteesib nii objekti olekumudeli maatriksite A ja B parameetrite muutuste suhtes vähetundliku (robustse) suletud süsteemi.

Olekutaastaja modaalsel sünteesil valitakse suletud süsteemile (Joonis 4.4) sobiv omaväärtuste paigutus. Maatriksi A -LC stabiilsed omaväärtused s_i määravad olekuvea koonduvuse kiiruse

$$\operatorname{Re} s_i < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\hat{A}t} = 0 \quad (4.30)$$



Joonis 4.5 Pidevaja juhtimisobjekti ja olekutaastaja omaväärtused

Olekutaastaja peab olema kiiretoimelisem kui objekt, et tegeliku oleku muutumisekiirus ei ületaks olekuhinnang võimalikku koonduvust. Modaalset sünteesil tuleb valida n olekutaastaja poolust (karakteristlik polünoom $\varphi(s)$) ja lahendada n võrrandiga võrrandisüsteem

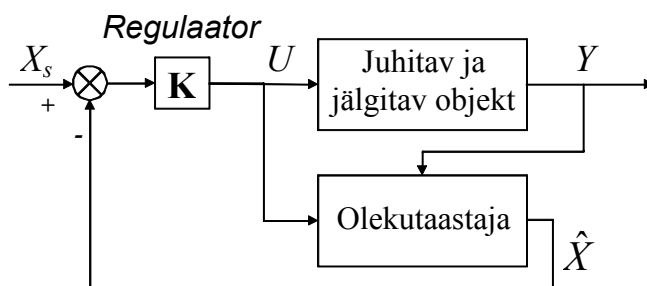
$$\det(sI - A + LC) = \varphi(s), \quad L_{n \times q} \quad (4.31)$$

Diskreetaja süsteemi puhul

$$\det(zI - A_d + L_d C) = \varphi(z), \quad L_d \text{ } n \times q \quad (4.32)$$

Kuna olekuregulaatori kasutamiseks on tihti vaja sünteesida ka olekutaastaja, siis võib neid kahte sünteesi teha ka korraga, kuigi see on samaväärne eraldi lahendamisega. Olekutaastaja ja olekuregulaatori koos leidmisel, kui

$$U = K(X_s - \hat{X}) \quad (4.33)$$



Joonis 4.6 Olekutaastajat sisaldav juhtimissüsteem

kirjeldavad kogu süsteemi dünaamikat võrrandid

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX - BK\hat{X}, & Y &= CX \\ \dot{\hat{X}} &= A\hat{X} - BK\hat{X} + LCX - LC\hat{X} \end{aligned} \quad (4.34)$$

mis ühtse süsteemimaatriksiga esitades on

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\hat{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Avaldades sama olekutaastamise vea ($e_{\hat{X}} = X - \hat{X}$) kaudu

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}} &= (A - BK)X + BK e_{\hat{X}} \\ \dot{e}_{\hat{X}} &= (A - LC)e_{\hat{X}}\end{aligned}\quad (4.36)$$

mis ühtse süsteemimaatriksiga A^* esitades

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \dot{e}_{\hat{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ e_{\hat{X}} \end{bmatrix}\quad (4.37)$$

Suletud süsteemi karakteristik polünoom on esitatav korrutisena

$$\det(sI - A^*) = \det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - A + LC)\quad (4.38)$$

kus

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BK) &= \phi_R(s) \\ \det(sI - A + LC) &= \varphi_{OT}(s)\end{aligned}\quad (4.39)$$

Analoogselt diskreetaja süsteemi jaoks, kus olekutaastaja ja regulaator on samal kujul

$$\hat{X}(k+1) = A_d \hat{X}(k) + B_d U(k) + L_d (Y(k) - \hat{Y}(k))\quad (4.40)$$

$$U = K_d (X_s(k) - \hat{X}(k))\quad (4.41)$$

saadakse

$$\begin{aligned}\det(zI - A_d + L_d C) &= \varphi_{OT}(z) \\ \det(zI - A_d + B_d K_d) &= \phi_R(z)\end{aligned}\quad (4.42)$$

4.2.2 Olekuregulaatori modaalne süntees antenni mudeli näitel

Kasutades pöördantenni objekti, mille sisu esitati punkti 3.1 lõpus ja mille olekumudeli tuletus on analoogne punktis 2.2.3 toodud mootori mudeliga, näitame modaalse sünteesi kasutamise võimalusi. Diferentsiaalvõrrandis lisatakse veel välisnäringu moment M_d . Olekumuutujateks on valitud antenni nurk ja tema tuletis, mis on tagasiside jaoks leitav andurisignaali töötlustega. Olekumudeli sisestus ja olekuregulaatori süntees Matlabis on järgneval Joonis 4.7. Sobiv omaväärtuste paigutus valitakse prototüüpülekandefunktsiooni parameetrite alusel sooviga saada kõige kiirem siire, mille puhul juhttoime ei ületa 24 V-i. Koheselt teostatakse süntees ka diskreetajas (sinised käsured). Sünteesi tulemuseks saadud regulaatorit kasutatakse Simulinkis koostatud simulatsiooniskeemis Joonis 4.8, millega saadud tulemused on Joonis 4.9. Sisuliselt sünteesitakse nurga jaoks PD regulaatori häälestuse ülekandeegurid, sest teine oleku tagasiside on nurga tuletise järgi.

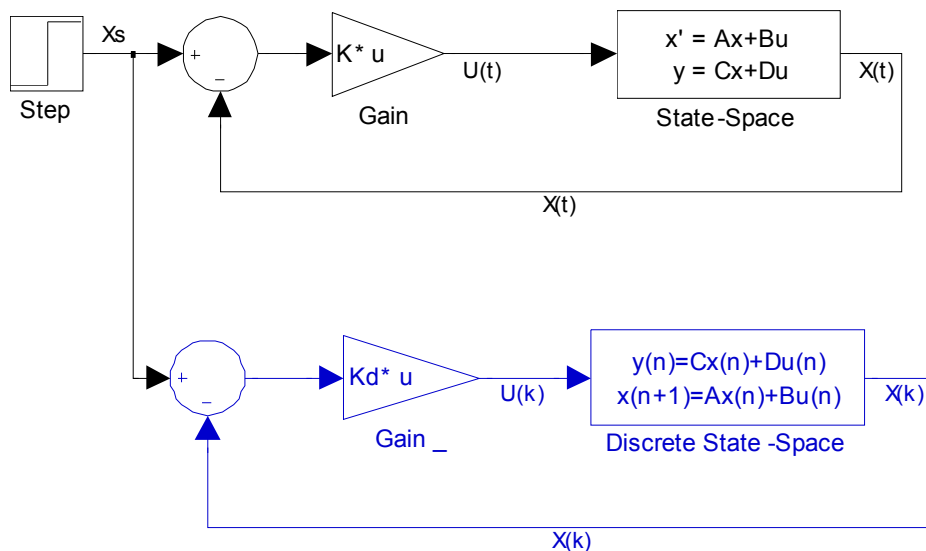
```

>> J=10; Bs=46; km=7.78;
>> A=[0 1; 0 -Bs/J];
>> B=[0; km/J];
>> G=[0; 1/J]
>> zeta = 0.7
>> wn = 4.4
>> nim=[1 2*zeta*wn wn*wn];
>> P= roots(nim)
P =
    -3.1240 + 3.0985i
    -3.1240 - 3.0985i
>> K=place(A,B,P)
K =
    24.8843    2.1183
>> td = 0.1;
>> [Ad,Bd]=c2d(A,B,td);
>> [Ad,Gd]=c2d(A,G,td);
>> Z = exp(P*td)
Z =
    0.6968 + 0.2231i
    0.6968 - 0.2231i
>> Kd=place(Ad,Bd,Z)
Kd =
    22.7189    2.5872

```

% objekti parameetrite sisestus
 % olekumudeli maatriksite A B sisestus
 % häiringu Md sisendmaatriks
 % sumbuvus, mis annab veidi alla 5% ülereg.
 % siirde kiiruse määrab wn
 % prototüüp ÜKF-i nimetaja
 % nimetaja omaväärtuste arvutamine
 -Tulemuseks saadud poolused
 % olekuregulaator modaalse sünteesiga
 -Tulemuseks saadud regulaatori maatriks
 % diskreetimise takti valik
 % diskreetaja mudeliks teisendus
 % häiringu maatriksi teisendus
 % pooluste teisendus diskre. Z-tasapinda
 -Tulemuseks saadud diskre. poolused
 % diskreetaja regulaatori arvutamine
 -Tulemuseks saadud regulaatori maatriks

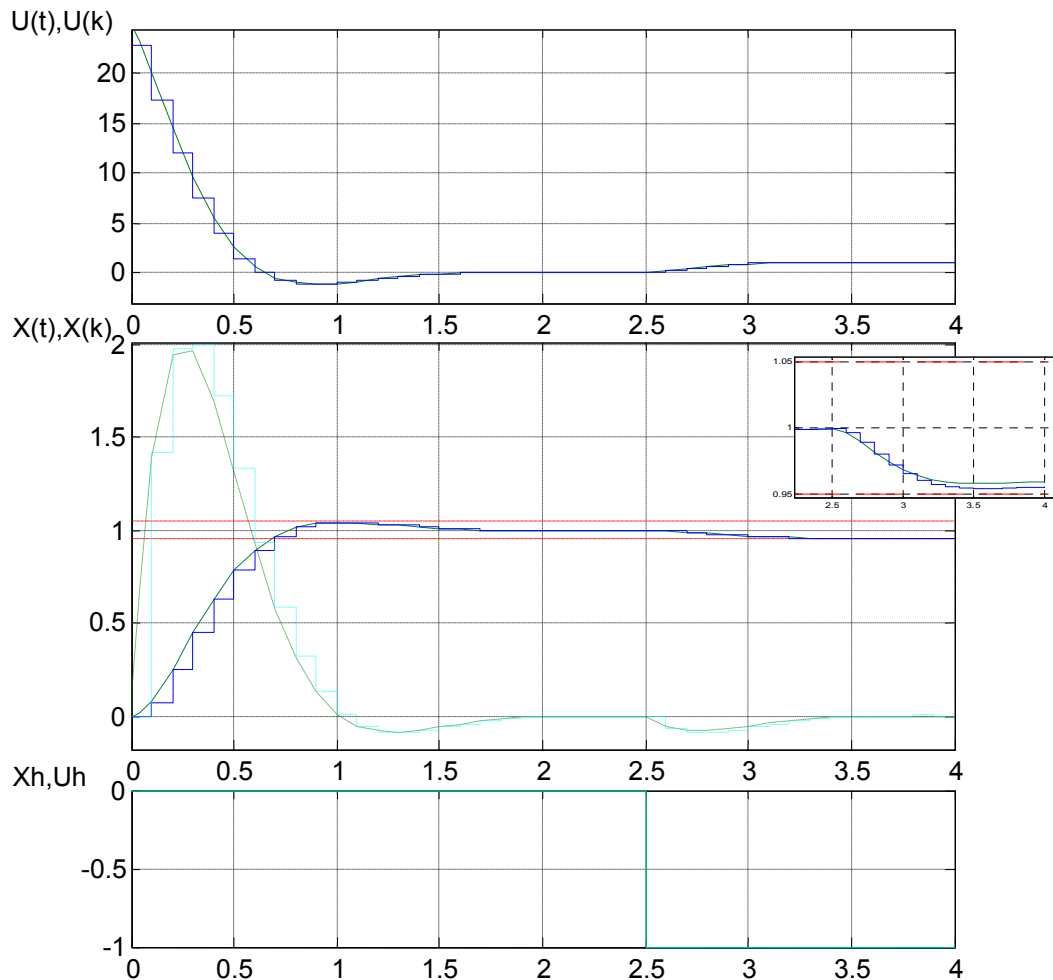
Joonis 4.7 Antenni mudeli sisestuse ja modaalse olekuregulaatori sünteesi käsud Matlabis



Joonis 4.8 Olekuregulaatoriga juhtimissüsteemi (lihtsustatud) simulatsiooniskeem

Olekumudeli plokis peab määrama ka väljund- (C) ja otsesidemaatriksi D. Kuna soovatakse plokki väljundis saada kogu olekuvektor, tuleb määramata C maatriks sisestada ühikmaatriksina (käsk `eye(n)`, n- olekumuutujate arv) ja vastav nulline D maatriks (käsk `zeros(n,r)`, r- sisendite arv). Lihtsustatud simulatsiooniskeemil ei ole kujutatud Scope plokki, millesse saadetud signaalid ajagraafikutena kuvatakse ja häiringu genereerimist. Seadesuuruse (hüppesignaalina - Step) genereerimise plokis

tuleb 0 ajahetkel tekkiva hüppesignaalina sisestada Initial value: [0;0], Final value: [1;0].



Joonis 4.9 Antenni muutujate siirded ühikulise sisendhäiringuga (tekib 2.5 sekundil)

Eelpool siiretelt on nähe, et nurga siire on paremate dünaamiliste omadustega ja väiksema staatilise veaga, kui lihtsa proportsionaalse nurga tagasisidega Joonis 3.10. Kokkulangevus diskreetaja variandiga on hea ja olulisi erinevusi ei ole väljaarvatud diskreetse veidi suurem staatiline viga samasuure häiringu juures.

4.2.3 Lineaarsete süsteemide optimaaljuhtimine

Lineaarsete süsteemide optimaaljuhtimisel minimiseeritakse juhtimiskriteeriumi. Ruutkriteerium mida minimiseeritakse on kujul

$$I(X, U) = \frac{1}{2} X^T(t_f) S X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t)\} dt \quad (4.43)$$

Diskreetaja süsteemi ruutkriteerium on kujul

$$I = \frac{1}{2} X^T(k_f) S X(k_f) + \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \{X^T(k) Q X(k) + U^T(k) R U(k)\} \quad (4.44)$$

Kaalumaatriksid peavad olema sümmeetrilised

$$S = S^T; \quad Q = Q^T; \quad R = R^T \quad (4.45)$$

ja positiivselt poolmääratud ning positiivselt määratud

$$S \geq 0; \quad Q \geq 0; \quad R > 0 \quad (4.46)$$

Viimane tingimus tuleneb miinimumi piisavast tingimusest ja R maatriksi pöördmaatriksi leidmisest. Juhtimiskriteeriumi ruutvormid annavad iga muutuja väärtuse korral positiivse resultaadi ja üle aja edasiliikudes kriteeriumi väärtus koguaeg kasvab, kui muutujad ei ole nulli jõudnud. Kuna lahend peab minimiseerima kriteeriumi väärtuse, siis rohkem läheb minimiseerimiseks suurte väärtustega muutujad, mille kaaluteguritega läbikorrutamisel ruutvormis tuleb suurem korrutis. See tähendab seda, et mida suuremad on konkreetse muutujaga korrutuvad kaalutegurid, seda rohkem peaks lahend selle muutuja siirete alust pinda vähendama.

Ekstreemumi tarvilik tingimus annab optimaalse juhttoime lahendiks:

$$\begin{aligned} U(t) &= -R^{-1}B^T P(t)X(t) = K(t)X(t) \\ P(t) &_{n \times n} \\ \dot{P}(t) &= -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q \\ P(t_f) &= S \end{aligned} \quad (4.47)$$

Eelnev avaldis näitab, et Riccati diferentsiaalvõrrandi lahendamise saadakse tulemuseks mittestatsionaarne olekuregulaator.

Diskreetajas on lahend kujul:

$$\begin{aligned} U(t) &= -R^{-1}B^T P(t)X(t) = K(t)X(t) \\ P(t) &_{n \times n} \\ \dot{P}(t) &= -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q \\ P(t_f) &= S \end{aligned} \quad (4.48)$$

Kuna mittestatsionaarset regulaatorit on tülikam realiseerida, siis loobudes lõppoleku kvaliteedi määramisest ja lubades kriteeriumi üle aja lõpmatuseni (4.49) saadakse minimiseerivaks lahendiks statsionaarne olekuregulaator (4.50).

$$I(X, U) = \int_0^\infty \{X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)\}dt \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} U(t) &= -R^{-1}B^T P X(t) = K X(t) \\ 0 &= -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \end{aligned} \quad (4.50)$$

Viimast võrrandit, mille otsitav on sümmeetriline P maatriks, nimetatakse algebraliseks Riccati võrrandiks.

Sarnaselt saadakse statsionaarne lahend ka diskreetaja kriteeriumi (4.51) jaoks lahendades diskreetset Riccati võrrandit

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \{X^T(k)QX(k) + U^T(k)RU(k)\} \quad (4.51)$$

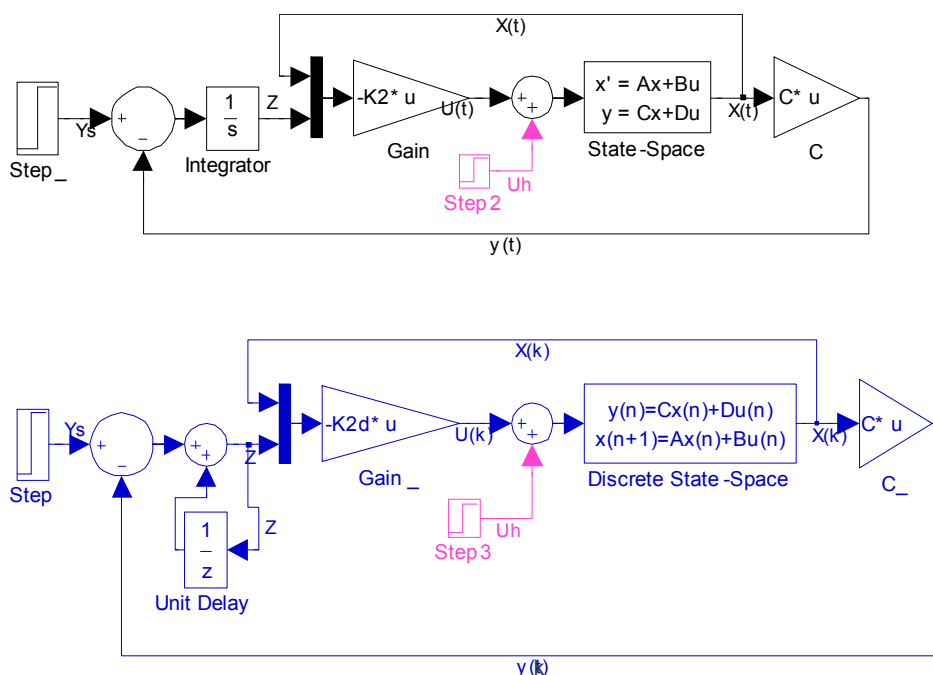
Kaalumaatriksite valikul võib lähtuda oleku- ja sisend muutujatele lubatud maksimaalsetest väärtustest ($X_{i,max}$, $U_{j,max}$) kasutades diagonaalmaatriksina valitava kaalumaaatriksi (Q,R) kõikide diagonaali elementide määramiseks järgmisi valemeid

$$q_{ii} \geq \frac{1}{(X_{i,max})^2} \quad r_{jj} \geq \frac{1}{(U_{j,max})^2} \quad (4.52)$$

Sellise valemi kasutamine ei garanteeri siirete maksimumide nõutud piiridesse jäämist pidevaja süsteemi puhul, kuid on väga hea lähtekoht, kust kaalutegurite häälestamist alustada. Olekumuutujatel, millel nõudeid ei ole võib juhtimiskriteeriumist välja jätta valides kaalutegurid nulliks. Juhitavatel muutujatel, millel selget maksimumi piiri ei ole antud, tuleks kaaluteguri valikul lähtuda maksimaalse siirde suurusest.

4.2.4 Järgivsüsteemi optimaalne süntees mootori mudeli näitel

Servomootori (p. 2.2.3) parameetrite ja olekumudeli sisestamiseks Matlabi kasutatakse selleks koostatud käsufaili servomot.m (vt. Lisa 3). Järgivsüsteemi sünteesil kasutatakse laiendatud olekuvektoriga süsteemi (4.13) (4.19) olekuvõrrandi maatriksite koostamiseks abikäsufaili PI_yreg.m ja PI_yregd.m (vt. Lisa 3). Ülesandeks on suunata mootori võll soovitud 1 radiaan nurga alla (täpsusega 5%) ületamata seejuures mootori siirde voolutarbes 1 A-t. Olekumudeli sisestus ja järgivsüsteemi süntees Matlabis on järgneval Joonis 4.11. Sünteesi tulemuseks saadud regulaatorit kasutatakse Simulinkis koostatud simulatsiooniskeemis Joonis 4.10, millega saadud tulemused on . Sisuliselt sünteesitakse mootori võlli nurga jaoks PID regulaatori häälestuse sarnased ülekandetegurid, sest teine oleku tagasiside on nurga tuletise e pöörlemiskiiruse järgi ja sama muutuja järgi on lisatud integraalne tagasiside. Lisaks nurga juhtimise kontuurile on olekuregulaatori koosseisus proportsionaalne mootori voolu tagasiside (esimese oleku järgi).



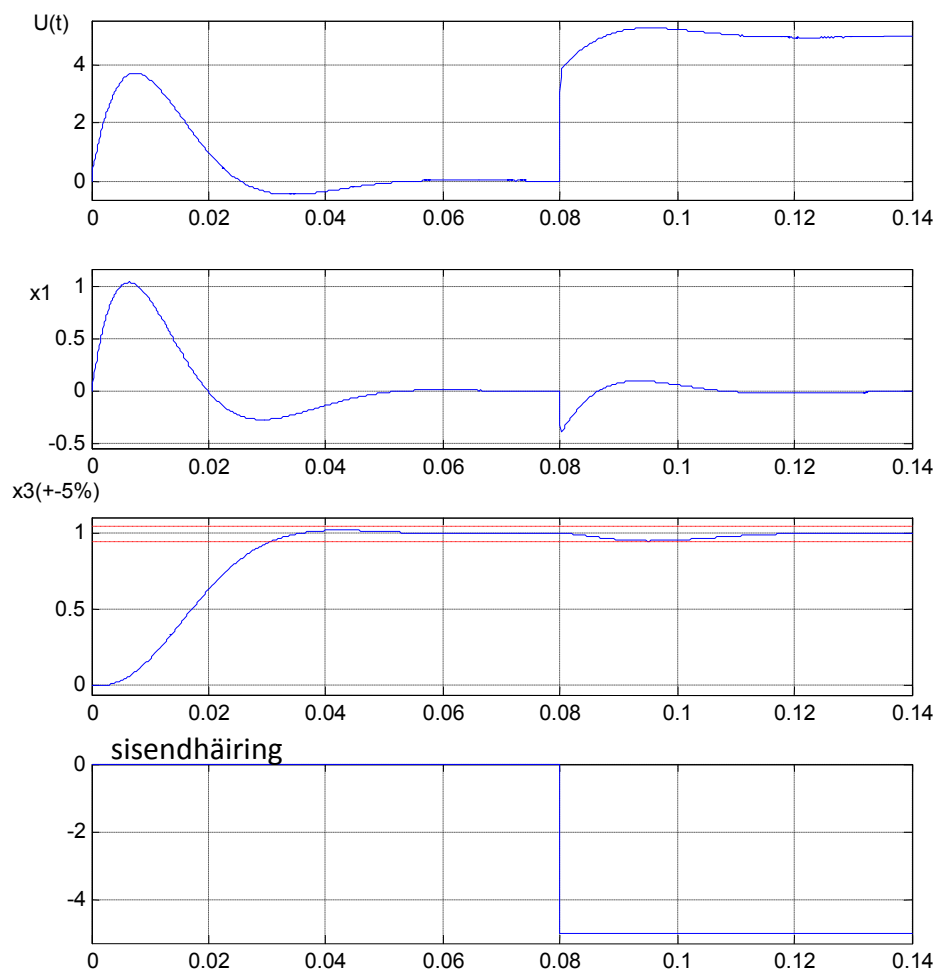
Joonis 4.10 Järgivsüsteemi (lihtsustatud) simulatsiooniskeemid

```

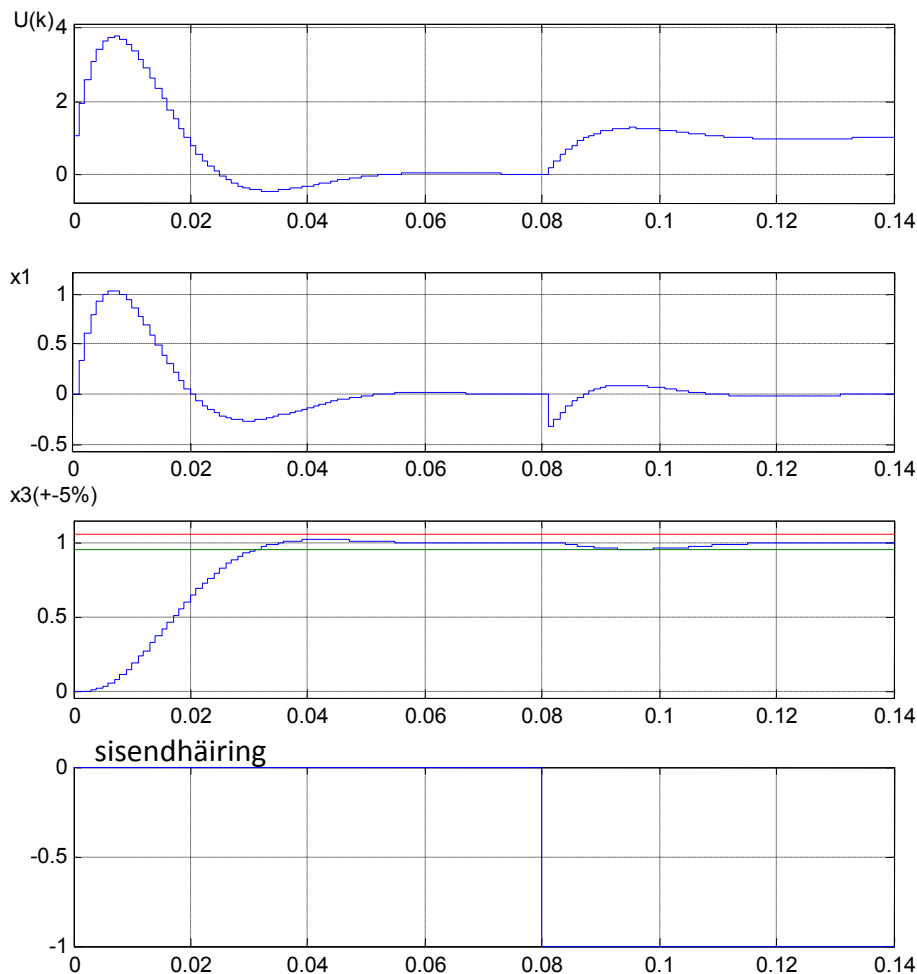
>> servomot                                % kogu käsufaili käskude käimalaskmiseks
                                           % sisestatakse käsureal faili nimi
                                           -Tulemused saadakse Workspace-i
>> C=[0 0 1]                             % juhitava oleku väljundiks mõõtmine
>> PI_yreg                                % laiendatud X vektoriga süst-i maatriksite
                                           % koostamise käsufail
                                           -Tulemused A2, B2 saadakse Workspace-i
>> Q2=diag([1/4 0 2 40000]);              % kaalumatriksi sisestus diagonaalmaatr.-na
>> R2=1/(24*24);                         % kaalumatriksi R sisestus
>> K2=lqr(A2,B2,Q2,R2)                   % optimaalne regulaatori süntees
K2 =
    1.0e+003 *
    0.0095    0.0005    0.0836   -4.8000
>> td=0.001                             % diskreetimise takti valik
(sama Joonis 4.7 olevaga)                % diskreetaja mudeliks teisendus
>> PI_yregd                              % laiendatud X vektoriga disk. süst-i
                                           % maatriksite koostamise käsufail
                                           -Tulemused A2d, B2d saadakse Workspace-i
>> Q2d=diag([1/4 0 2 40000*td*td]);      % kaalumatriksi sisestus diagonaalmaatr.-na
>> R2d=1/(24*24);                       % kaalumatriksi R sisestus
>> K2d=dlqr(A2d,B2d,Q2d,R2d)             % optimaalne regulaatori süntees
K2d =
    0.0798    0.0966   18.5861   -1.0645
                                           -Tulemuseks saadud regulaatori maatriks

```

Joonis 4.11 Järgivsüsteemi optimaalse sünteesi käsud Matlabis



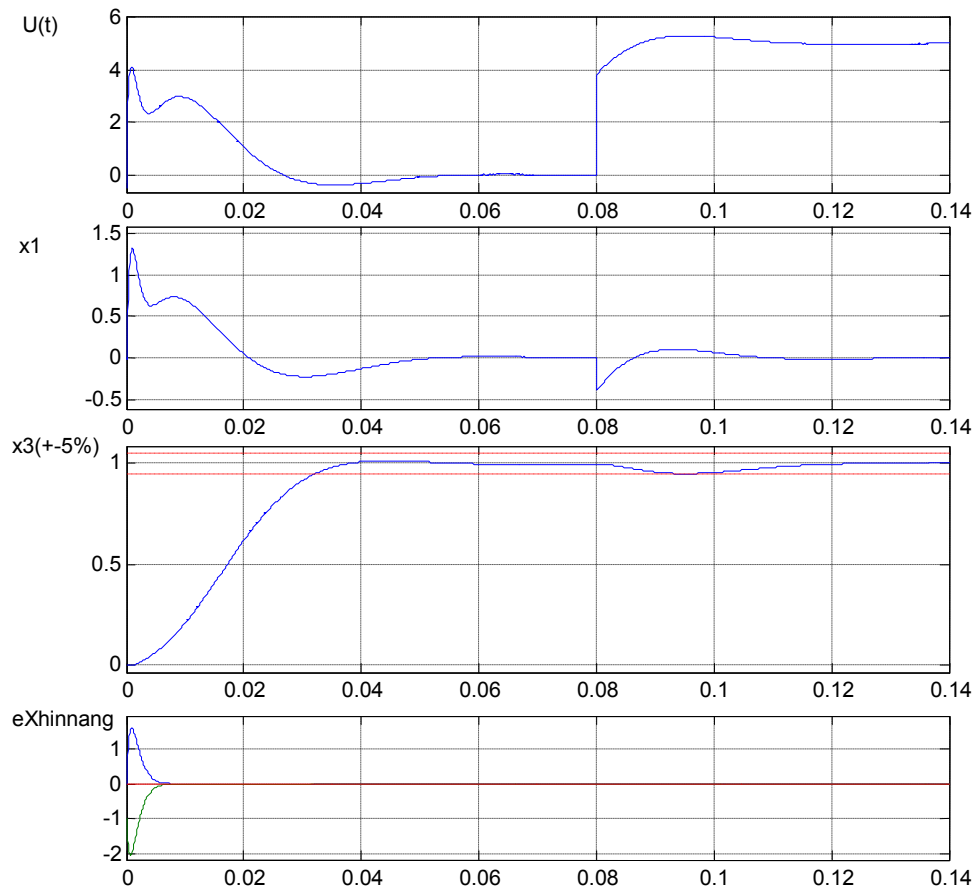
Joonis 4.12 Mootori mudeli siirded optimaalse pidevaja järgivsüsteemiga



Joonis 4.13 Mootori mudeli siirded optimaalse diskreetaja järgivsüsteemiga

Eelpool olevatelt graafikutelt on näha, et järgivsüsteemi häiringutaluvus on päris hea ja staatilist viga nurgal ei jää. Diskreetaja süsteemil, mis on leitud sama kaalutegurite valikuga, võib küll lubatav häirigu suurus olla väiksem. Kui olekuregulaatori optimaalsel süsteemil kaalumatriksite valik diskreetajale üle minnes ei muutu, siis järgivsüsteemi integreeriva osa erinevuse tõttu tuleb integraalse tagasiside muutuja(te) kaalutegur(id) diskreetajas läbi korrutada diskreetimistakti ruuduga.

Kõik eelpool näites olekutagasisides kasutatud muutujad, ei pruugi olla tagasiside jaoks kättesaadavad. Seepärast sünteesitakse eelneva lahenduse jätkuks järgivsüsteemile olekutaastaja. Olekutaastaja omaväärtuste valikul modaalses sünteesis, lähtutakse suletud süsteemi pooluste paigutusest ja valitakse sealt kolm kiiremat, mida nihutatakse veelgi kiiremaks, kuni olekutaastaja algoleku vea koondumine nulli muutub piisavalt kiireks, et mitte mõjutada siirde käitumist seadesuuruse lähedale jõudes. Skeemil Joonis 4.15 on koos olekutaastajaga töötava järgivsüsteemi simulatsiooniskeem. Olekutaastaja struktuur (rohelised plokid) on ilmetamise jaoks jäetud nähtavaks. Kuigi reaalses süsteemis kogu olekuvektori kõikide signaalide väärtus mõõdetav ei ole, võimaldab simulatsiooni mudel siiski mudeli ja hinnatud olekuväärtusi võrrelda ja graafikul nende erinevust (olekutaastamise viga) näidata. Olekutaastamise viga tekib eelkõige, kui alghetkel ei ole olekuhinnang algolekuga võrdne (nagu joonisel) või olekuhäiringute mõjul, mida olekutaastaja ei oska interpreteerida.



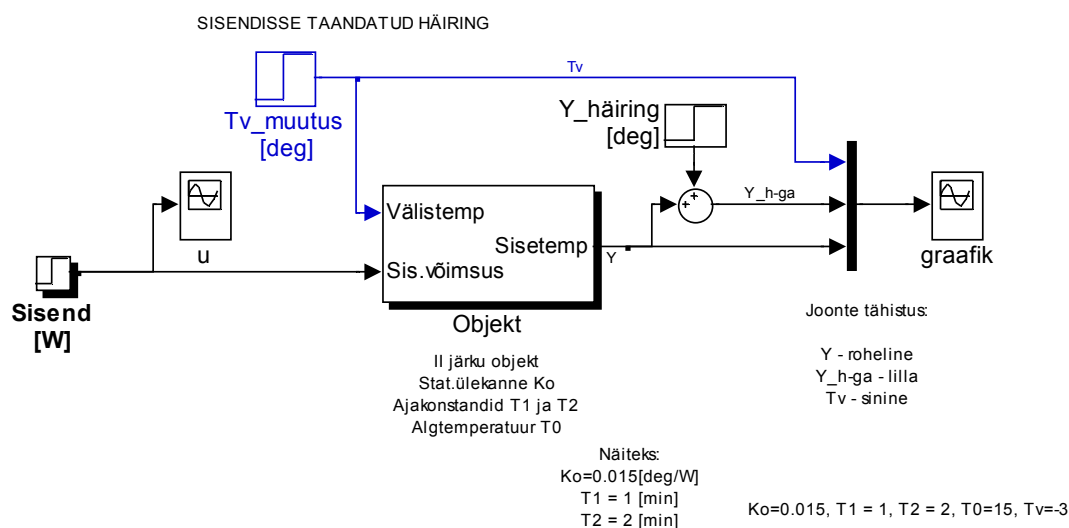
Joonis 4.16 Mootori mudeli siirded olekutaastajat kasutava järgivsüsteemiga

Viimasetel graafikutel on näha, et kui alghetkel on olekuhinnang veidi vale (x_2 hinnang ei ole 0, vaid 1), siis piisavalt kiire olekutaastaja puhul kõrvaldatakse see kiiresti ja juhtimissüsteemi siirde kvaliteet oluliselt rikutud ei saa. Vaid esimestel hetketel on juhttoime vale. Veaga olekuhinnangu õigeks koondumise dünaamiline protsess ajab kahjuks paigast ära ka alghetkel muidu õiged olnud hinnangud. Sellise nähu vähendamiseks võiks kasutada vähendatud järguga olekutaastajat, aga selle süntees vajab käsitsi lähenemist. Algoleku vea probleem on tegelikult rohkem teoreetiline, sest reaalse süsteemi käivitamisel on üldiselt algolek teada (seisab).

Kasutatud kirjandus

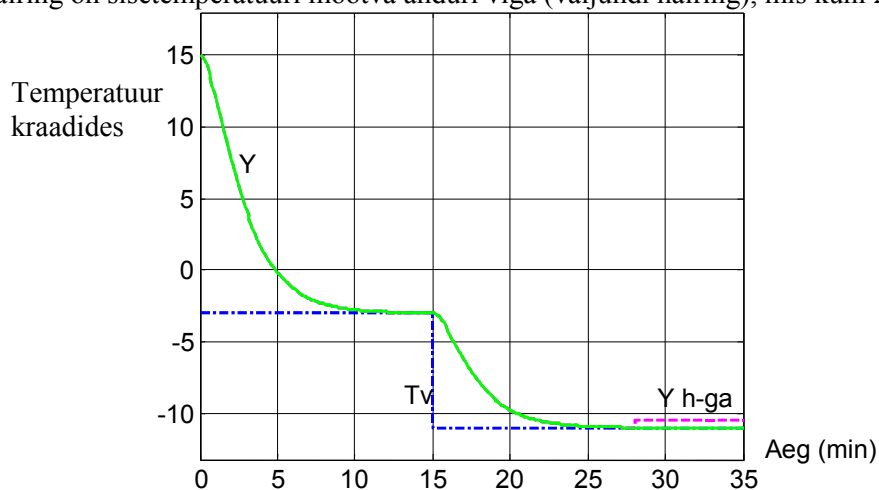
1. **Dutton, K., Thompson, S. and Barraclough, B.** *The art of control engineering*. Harlow : Addison Wesley, 1997. p. 813.
2. **Ogata, K.** *Modern Control Engineering*. 4th. Englewood Cliffs (N.J.) : Prentice Hall, 2002. lk 961.
3. **Tewari, A.** *Modern control design with MATLAB and SIMULINK*. New York : Wiley, 2002.
4. **Kull, Rein, Pihlak, Ants ja Vende, Kullo, [toim.].** *Inglise-Eesti tehnikasõnaraamat*. Tallinn : Euroõlikool, 2000. a.
5. **Kuo, B. C.** *Automatic control systems*. VII. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1995. lk 897.
6. **Sillamaa, Hanno.** *ISS0010 Süsteemiteooria*. Tallinn : TTÜ, 1999. lk 120.
7. **MathWorks.** *Control System Toolbox™ 8: User's Guide*. [pdf fail] 2009. a.
8. **D'Azzo, J. J., Houpis, C. H. ja Sheldon, S. N.** *Linear control system analysis and design with MATLAB*. [(e-raamat) www.crcnetbase.com] V Revised and expanded, New York : Marcel Dekker, 2003. a.
9. **Nise, N. S.** *Control systems engineering*. IV. int. : Wiley, 2004. lk 985.
10. **Landau, I. D. ja Zito, G.** *Digital control systems: design, identification and implementation*. London : Springer, 2006. lk 484.
11. **Naadel, Raul.** Automaatjuhtimise alused. *TTÜ Elektriagamite ja jõuelektroonika instituut*. [Võrgumaterjal] 2006. a. [Tsiteeritud: 20. 07 2009. a.] (õppevahend). <http://www.ene.ttu.ee/elektriagamid/oppeinfo/materjal/AAR0020/Raamat.pdf>.
12. **Rüstern, Ennu.** Automaatjuhtimissüsteemid: Modaaljuhtimine. *TTÜ automaatikainstituut*. [Võrgumaterjal] 1998. a. [Tsiteeritud: 20. 07 2009. a.] <http://www.dcc.ttu.ee/Automaatika/LAS/modaal1.pdf>. (e-õppematerjal).
13. **Franklin, G. F., Powell, J. D. ja Emami-Naeini, A.** *Feedback control of dynamic systems*. 3rd. Reading : Addison-Wesley, 1994. lk 778. (V redaktsioon ilmus 2006).
14. **Åström, K. J. ja Hägglund, T.** *Advanced PID control*. Research Triangle Park : ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society, 2006. lk 460.
15. **Võrk, Jaan.** *Modaaljuhtimine: õppeabimaterjal*. Tallinn : TTÜ Automaatika kateeder, 1991. lk 52.
16. **Paraskevopoulos, P. N.** *Modern Control Engineering*. New York : Marcel Dekker, 2002. lk 736.
17. **Dorf, R. C. ja Bishop, H. R.** *Modern Control Systems*. IX. Upper Saddle River : Prentice-Hall, 2001. lk 983.
18. **Aström, K. J. ja Wittenmark, B.** *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. 3rd. Upper Saddle River (N.J.) : Prentice Hall, 1997. lk 557.
19. **Klee, H.** *Simulation of dynamic systems with MATLAB and SIMULINK*. Boca Raton : CRC, 2007. lk 762.
20. **Franklin, G. F., Powell, J. D. ja Workman, M. L.** *Digital control of dynamic systems*. 3rd. Menlo Park : Addison-Wesley, 1998. lk 742.
21. **Skogestad, S. ja Postlethwaite, I.** *Multivariable feedback control : analysis and design*. Chichester : Wiley, 1996. lk 559.
22. **Datta, B.N.** *Numerical methods for linear control systems design and analysis*. [(e-raamat) www.knovel.com] Amsterdam : Elsevier, 2004. a.
23. **Tomson, Jaan ja Lehtla, Tõnu.** *Automaatjuhtimine*. Tallinn : TTÜ, 1997. lk 182. (<http://www.ene.ttu.ee/elektriagamid/oppeinfo/AAR3330/>).
24. **MathWorks.** *MATLAB® 7 : Getting Started Guide*. [pdf fail] 2009. a.

LISA 1 Termilise objekti mudeli simulatsiooniskeemid ja tulemused

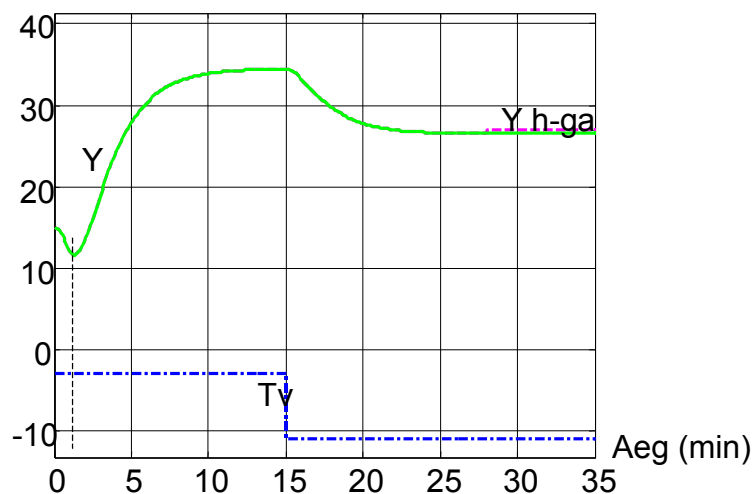


Joonis 0.1 Simuleringi skeem objekti mudeli käitumise uurimiseks

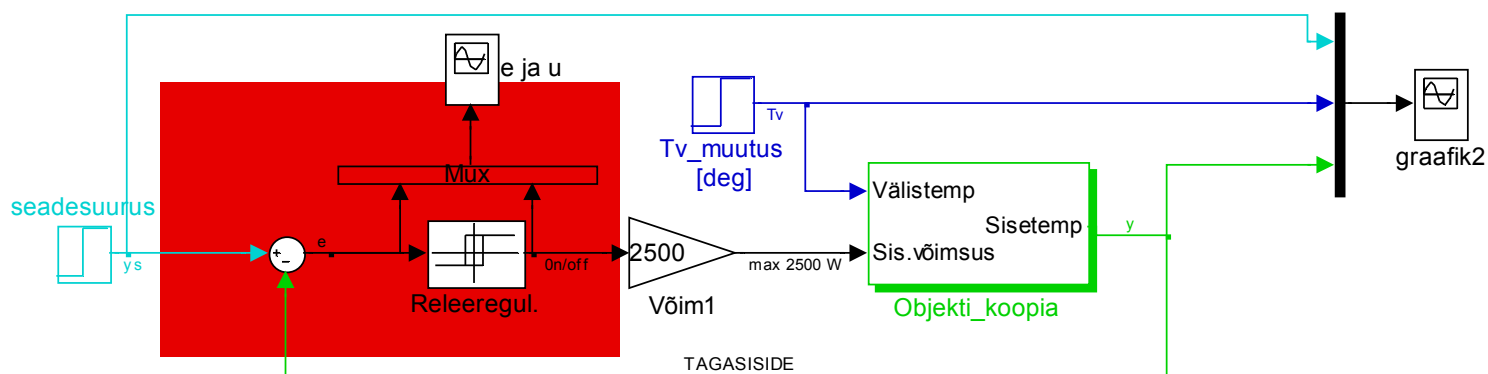
Tv on välis temperatuuri väärtus (häiring), mis muutub simulatsiooni 15 minutil teistsuguseks
Y_häiring on sisetemperatuuri mõõdva anduri viga (väljundi häiring), mis kuni 28 min-i on 0



Joonis 0.2 Simulatsiooni graafik objekti vabaliikumisel ($u = 0$) häiringute (Tv, Y_h) mõjul

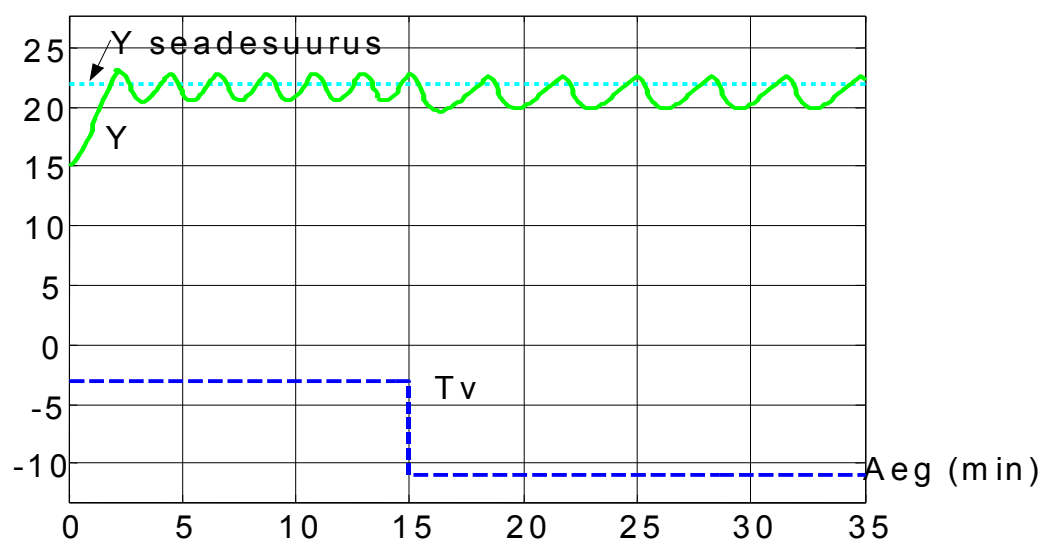


Joonis 0.3 Simulatsiooni graafik objekti sundliikumisel ($u = 2500\text{W}$ antakse pärast esimest ajaühikut)

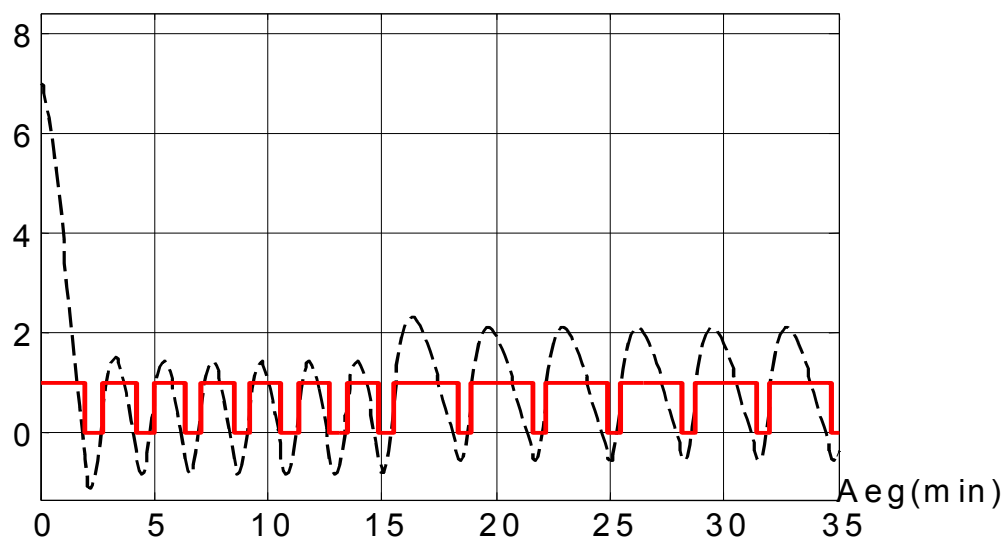


Joonis 0.4 Simulinki skeem kahepositsioonilise (0/1) regulaatoriga juhtimiseks

Regulaator väljastab signaali 1 või 0, mida tuleb tõlgendada, kui maksimaalse küttevõimsuse (plokis Võim1) sisse või väljalülitamist.

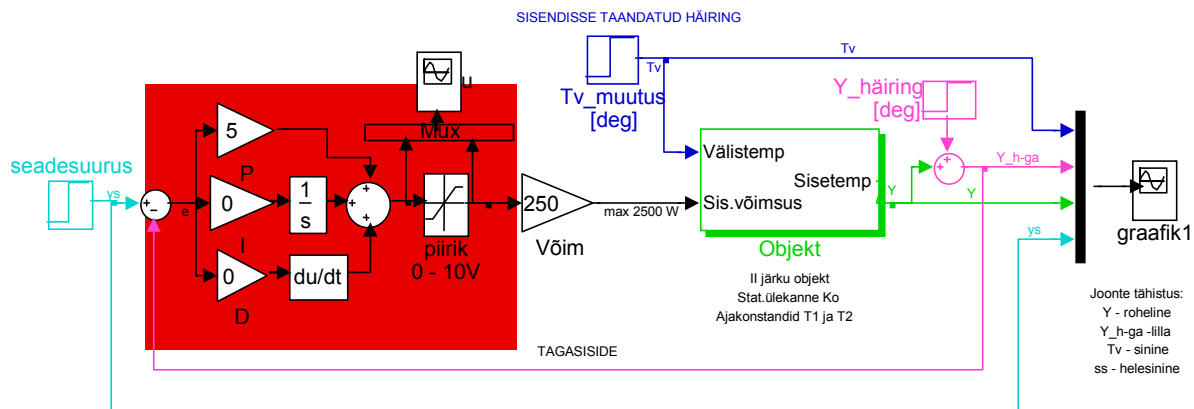


Joonis 0.5 Simulatsiooni graafik positsioonregulaatoriga juhtimisel

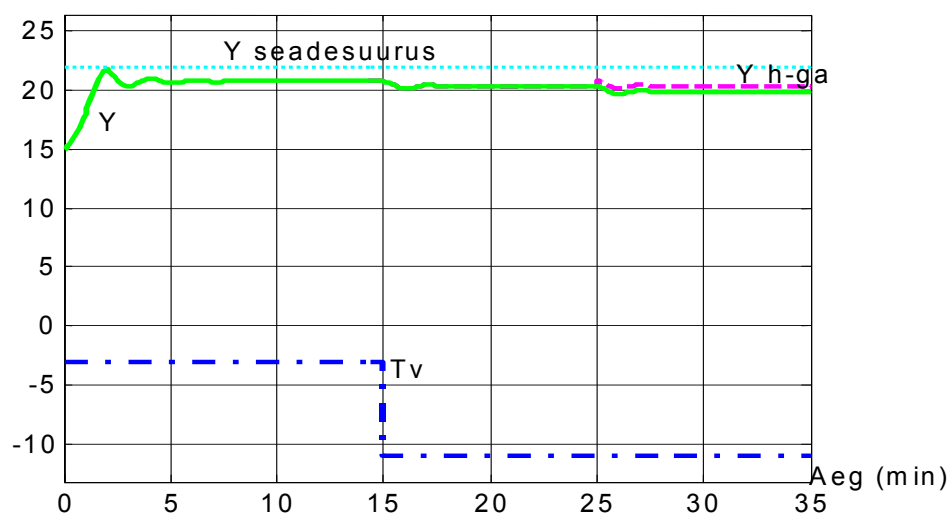


Joonis 0.6 Juhttoime (punane) ja veasignaali positsioonregulaatoriga juhtimisel

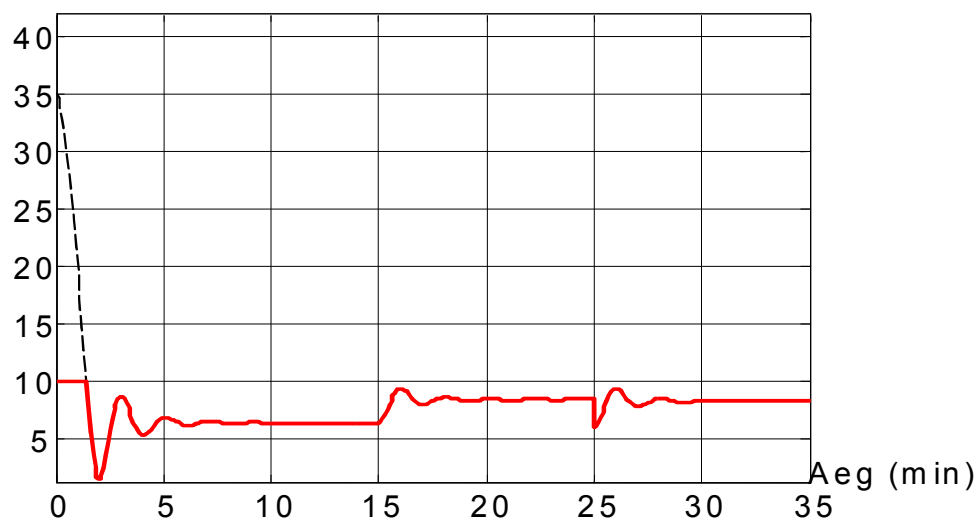
Viimasel joonisel on raskelt märgatav, et ümberlülitumine toimub +0,5 ja -0,5 kraadise vea juures.



Joonis 0.7 Simulinki skeem mudeli juhtimiseks PID regulaatoriga



Joonis 0.8 Simulatsiooni graafik objekti juhtimisel PID ($P=5$, $I=0$, $D=0$) regulaatoriga



Joonis 0.9 Juhtoime graafik [V] enne ja pärast nivoo piikikut

LISA 2 Automaatjuhtimise baassõnastik ver. 1.03

Automation (automatic control | control engineering) автоматика (автоматическое управление)

TERMIN	SÜMBOL	inglisekeelne VASTE	
adaptiivne		<i>adaptive</i>	адаптивная
ahela võimendus	L	<i>loop transfer</i>	усиление контура
aegruum, ajavald		<i>time-domain</i>	
ajakarakteristik (vt. ka siirdekarakteristik)		<i>time-domain response</i>	временная характеристика
ajakonstant	$T_1, T_2 \dots$	<i>time constant</i>	временная констант
analüüs		<i>analyse</i>	анализ
andur (mõõtemuundur)		<i>sensor, transducer</i>	датчик
algolek	$X(0), X_0$	<i>initial state</i>	начальное состояние
algingimused		<i>initial conditions</i>	начальные условия
aperioodiline- (lülili)		<i>deadbeat</i>	
automaat		<i>automaton</i>	автомат
astak (maatriksi-)		<i>rank</i>	ранг
astmeline (kaskaad-) juhtimine		<i>cascade control</i>	каскад ...
avanev (kontakt)	NC	<i>open (N.C.- norm. close)</i>	размыкающий
blokeering		<i>interlock</i>	блокировка
diferentsiaal- (võrrandid)		<i>differential</i>	дифференциальная
diferents- (võrrandid)		<i>difference</i>	разностная
digitaal- (süsteem)		<i>digital ...</i>	цифровая ...
diskreetimine		<i>sampling</i>	дискретизация
diskreetimise samm	$\Delta t, \dots$	<i>sampling period, sample time</i>	шаг дискретизации, период ...
diskreetne (olek)		<i>discrete</i>	дискретный
diskreetne protsess		<i>discrete event ...</i>	
faasi-muutuja	$x_1, x_2, x_3, \dots$	<i>phase variable</i>	фазовая переменная
-portree		<i>portrait</i>	портрет
-tasapind		<i>plane</i>	плоскость
-trajektoor		<i>trajectory</i>	траектория
hilistumine	τ	<i>delay (time delay)</i>	запаздывание
hinnang (oleku-)	$(\hat{X})$	<i>estimation</i>	оценка
häiring	F_i, f, v, w, d	<i>disturbance (perturbation)</i>	возмущение, помеха
hüppesignaal (ühikhüpe)		<i>step signal (unit step)</i>	скачкообразный сигнал
hüsterees		<i>hysteresis</i>	зона неоднозначности
identifitseerimine		<i>identification</i>	
impulsskarakteristik	$\delta(t) \rightarrow h(t), h'(t)$	<i>impulse response</i>	импульсная переходная функция
sis. (impulsskaja)			
ise- (häälestumine) ...		<i>self- (tuning)</i>	сама- (настройка)
jada-		<i>serial</i>	последовательны...
juhitavus		<i>controllability</i>	управляемость
juhitavuse tingimus		<i>controllability condition</i>	условие управляемости
juhitava suuruse tegelik väärtus	y, PV	<i>controlled variable</i>	управляемое значение
...-juhtimine		<i>... control</i>	... управление
juhtimisalgoritm		<i>control law</i>	... управления
juhtimiskriteerium	I	<i>cost function</i>	целевая функция
juhtimismeetod		<i>control method</i>	... управления
juhtimisobjekt	O	<i>controlled plant, process</i>	объект управления

juhtimissüsteem		<i>control system</i>	система управления
juhtseade (vt. regulaator)	R	<i>controller</i>	управляющее устройство, регулятор
juhttoime	u, CO	<i>control input, actuating signal</i>	управляющее воздействие
(pärast täiturit) m, MV		<i>manipulated variable</i>	
juhttoimete vektor	U	<i>input vector</i>	вектор управления
jälgitavus		<i>observability</i>	наблюдаемость
jälgitavuse tingimus		<i>observability condition</i>	условие наблюдаемости
järgiv juhtimissüsteem		<i>servo, tracking system</i>	следающая система упр.
järk (võrrandi- /maatriksi- /süsteemi-)		<i>order, degree</i>	порядок уравнения, размерность ...
juurhodograaf		<i>dimension</i>	размерность ...
kaas-kompleksed ...		<i>root-locus</i>	корневой годограф
karakteristlik võrrand	Φ, φ	<i>self-conjugated characteristic equation</i>	характеристическое уравнение
polünoom		<i>polynom</i>	
koefitsient, kordaja, tegur	k, k(t)	<i>coefficient</i>	коэффициент
kompositsioon (ühendamine)		<i>composition</i>	композиция (соединение)
korrigeerimislüli			
käitumisomadused (süsteemi)		<i>dynamics, behaviour, performance</i>	поведение, динамика
laiendatud	$\tilde{X}$	<i>augmented</i>	расширенный
lineariseerimine		<i>linearization</i>	линеар...
lineaarne statsionaarne ...		<i>LTI</i>	
lugeja (muru-)		<i>numerator</i>	числитель
lõplik siirdeprotsess (finitne)		<i>finite time transition</i>	конечный ...
maatriks eksponent	e^{At}	<i>transition matrix</i>	переходная матрица
maatriks võrrand (? vektor-)			
mittelineaarne element		<i>nonlinear</i>	нелинейный
modaaljuhtimine		<i>pole-placement control</i>	модальное управление
modelleerimine		<i>pole-assignment tech.</i>	
mudel		<i>modeling</i>	моделирование
matemaatiline-		<i>model</i>	модель
muutuja		<i>mathematical</i>	математическая
negatiivne ...		<i>variable</i>	переменная
nimetaja (muru-)		<i>negative ...</i>	отрицательный ...
null (ülekande-)	$n_1, n_2 \dots$	<i>denominator</i>	знаменатель
numbrilised meetodid		<i>zero</i>	нуль
olek		<i>numerical</i>	цифровой
olekugraaf		<i>state</i>	состояние
olekumuutuja	$X, x_1, x_2, \dots$	<i>state diagram</i>	граф состояния
olekumudel		<i>state variable</i>	переменная состояния
olekuregulaator		<i>state model</i>	модель состояния
olekuruum	s	<i>state space</i>	пространство состояний
olekutaastaja (-hindaja)	$\hat{X}$	<i>observer</i>	восстановитель состояния
olekuvektor	X		наблюдатель
olekuvõrrand	$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U$	<i>state vector</i>	вектор состояния
omaväärtused		<i>state equation</i>	уравнение состояния
		<i>eigenvalues</i>	собственные значения

(maatriksi-, süsteemi-)			
omavõnkesagedus	ω_n	<i>natural undamped freq.</i>	собственная частота
operaatormetod	L, L^{-1}	<i>transform method</i>	операторный метод
optimaal- (juhtimine)	z, z^{-1}	<i>optimal control</i>	оптимальный ...
otseside		<i>feed-forward</i>	прямая связь
paralleel-		<i>parallel</i>	параллельный
parameeter		<i>parameter</i>	параметр
PID		<i>PID</i>	ПИД
poolus	$p_1, p_2, \dots$	<i>pole</i>	полюс
positsioon- (regulaator)		<i>step control</i>	-х позиционное (регул.)
protsess		<i>process</i>	процесс
pöörd maatriks	A^{-1}	<i>inverse matrix</i>	
püsiolek		<i>steady-state</i>	установившееся состояние
regulaator	R	<i>controller, regulator</i>	регулятор
reguleerimis- (süsteem)		<i>regulation</i>	регулирующий
reguleeriv organ (-seadis)		<i>final control element (control valve)</i>	регулирующий орган
saatja (andur)		<i>transmitter</i>	передатчик
sagedus karakteristik	$L(\omega)$	<i>frequency-domain resp.</i>	частотная характеристика
(-tunnusjoon)			
seadesuurus	w, r, SP	<i>reference signal (-value)</i>	задающий сигнал
		<i>set point</i>	заданное значение
seadmed,		<i>control instrumentation</i>	устройства ...
(automaatika-) vahendid			
signaal		<i>signal</i>	сигнал
signaaligraaf		<i>signal flow graph</i>	сигнальный граф
siire		<i>transition</i>	переход
siirdekarakteristik	$1 \rightarrow \text{sis.}$	<i>(unit -)step response</i>	переходная
(e. hüppe-, siirdekaja)	$g(t), h(t)$	<i>transient response</i>	характеристика
siirde protsess		<i>transient (dynamic)</i>	переходный процесс
		<i>process</i>	
siirde protsessi kvaliteet		<i>performance criteria</i>	
singulaarpunkt		<i>singular point</i>	особая точка
sisend	$u, u(t), u(k)$	<i>input</i>	вход
sisend vektor	U	<i>input vector</i>	вектор ВХОДОВ (-управлений)
sisend maatriks	B		входная ...
staatiline viga	e_{st}	<i>steady-state error</i>	статическая ошибка
stabiilsus		<i>stability</i>	устойчивость
asümptootiline			
BIBO			
stabiilsuskriteerium		<i>stability criterion</i>	критерий устойчивости
stabiilsusvaru			запас устойчивости
sulguv (kontakt)	NO	<i>close (N.O - norm. open)</i>	закрывающий
sumbuv protsess		<i>descending (damped) ...</i>	затухающий ...
	$\alpha = \zeta \cdot \omega_n$	<i>damping constant/factor</i>	
sumbuvus tegur	ζ	<i>damping ratio</i>	коэф. затухание
sundliikumine		<i>forced motion</i>	вынужденное движение
süntees		<i>design</i>	синтез

süsteem		system	система
alluvkontuuridega -		<i>cascade-</i>	каскадная
astatiline -		-	астатическая
avatud -	$W(\dots)$	<i>open-loop</i>	разомкнутая
determineeritud -		<i>deterministic</i>	детерминированная
diskreetne -		<i>discrete</i>	дискретная
diskreetaja -	$[k], [k+1]$	<i>discrete-time</i>	дискретного времени
dünaamiline -		<i>dynamic</i>	динамическая
koondatud param.-tega		<i>lumped parameter</i>	
lineaarne -		<i>linear</i>	линейная
mitmemõõtmeline		<i>MIMO</i>	многомерный
mittelineaarne -		<i>nonlinear</i>	нелинейная
mittestabiilne		<i>non-stable</i>	неустойчивый
normaliseeritud		<i>normalized</i>	нормализованная...
pidev(aja) -		<i>continuous</i>	непрерывная
statsionaarne -		<i>time-invariant</i>	стационарная
mittestatsionaarne -		<i>time-varying</i>	нестационарная
stohhastiline -		<i>stochastic</i>	стохастическая
suletud -	$\Phi(\dots)$	<i>closed-loop</i>	замкнутая
tagasiside (inertne-, jäik-, negat., oleku-)		<i>feedback</i>	обратная связь
trajektoor		<i>trajectory</i>	траектория
tundlikkus		<i>sensitivity</i>	чувствительность
tuur		<i>loop</i>	контур
täitur (-seade, -mehhanism)		<i>actuator</i>	исполн. устройство, механизм
vabaliikumine		<i>free motion</i>	свободное движение
veasignaali	$e, e = w - y$	<i>error signal</i>	ошибка
väljund	$y, y(t), y(k)$	<i>output</i>	выход, выходная величина
väljundmaatriks	C		выходная матрица
väljundvektor	Y	<i>output vector</i>	вектор выходов
väljundvõrrand	$Y=C \cdot X$	<i>output equation</i>	уравнение выхода
võrdlussõlm		<i>comparator</i>	
ülekandefunktsioon	$H, G, W, \dots$	<i>transfer function</i>	передаточная функция
ülekande tegur (staatiline)	G	<i>gain, transfer factor</i>	стат. коеф. передачи
ülekandemudel		<i>input-output (transfer) model</i>	передаточная модель
ülekandemaatriks ?	H	<i>transfer matrix</i>	передаточная матрица
ülereguleerimine	δ	<i>maximum overshoot</i>	перерегулирование
ühikmaatriks	I, E	<i>unit matrix</i>	единичная матрица

LISA 3 Matlabi käsufailid

Servomootori käsufail

```
% alalisvoolu (DC) servomootori mudel
% x1 - rootori mähise vool [A]
% x2 - nurkkiirus [rad/s]
% x3 - nurk [rad]
% u1 - mähise sisendpinge [V]
%
% Bm - sumbuuste koefitsient [kgw.m.s/rad][N.m/rad/s]
% Jm - rootori inertsmoment [kg.m2]
% km - momendi koefitsient [N.m/A]
% kb - vastuelektromotoorjõu koef. [V.s/rad][V/rad/s]
% Ra - mähise takistus [Ohm]
% La - mähise induktiivsus [H]
```

%MOTOR1

```
Bm=0.19e-3
Jm=41.4e-7
km=24.1e-3
kb=24.1e-3
Ra=2.99
La=0.42e-3
```

```
A=[ -Ra/La  -kb/La  0;
     km/Jm  -Bm/Jm  0;
     0      1      0]
B=[ 1/La; 0; 0]
```

```
G=[ 0; -1/Jm; 0]
```

```
Bh=[B G]
```

% n= - õpilaskoodi viimane number

```
X0=[0; 0; 0], Xs=[0; 0; 1+0.1*n], treg=0.035+0.002*n
```

Käsufail PI_yreg.m

```
% PI järgivsüsteemi süntees
% Integraalne TS väljundi järgi (järgimiseks) + TS oleku järgi
% Laiendatud olekuektoriga süsteem
% ~
% X = [ X ; Z ]
% .
% Z = R - Y = R - CX
%
% ! ~ ~ ~
% U = +K*X +Ki*Z = -K*X , K = [-K -Ki]

nnn=size(A,1); rrr=size(B,2); % olekumuutujate arv ja sisendite arv

if exist('C'),
y_r=size(C,1); % väljundite arv

A2=[A zeros(nnn,y_r); -C zeros(y_r,y_r)];
B2=[B;zeros(y_r,rrr)];

astak2=rank(ctrb(A2,B2)) % juhitavuse maatriksi astak
```

```

else
    disp('C matriks puudub!')
end

```

Käsufail pi_yregd.m

```

% PI järgivsüsteemi süntees DISKREETNE
% Integraalne TS väljundi järgi (järgimiseks) + TS oleku järgi
% {m} = väljundite arv
%
%  $U(k) = -K \cdot X(k) + K_i \cdot Z(k)$ ,  $Z(k) = Z(k-1) + Y_s(k) - Y(k)$ 
%
% ~
%  $X(k) = [X_e(k); Z(k)]$  laiendatud süsteemi olekuvektor
%
% ~
%  $A = \begin{bmatrix} A & 0; & -CA & I \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} B; & -CB \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{U}(k) = -\tilde{K} \cdot \tilde{X}(k)$ ,
%  $\begin{matrix} \{m\} & \{m\} \end{matrix}$ 

nnn=size(Ad,1); rrr=size(Bd,2); % olekumuutujate arv ja sisendite arv

y_r=size(C,1); % väljundite arv

A2d=[Ad zeros(nnn,y_r); -C*Ad eye(y_r)];
B2d=[Bd; -C*Bd];

astak2=rank(ctrb(A2d,B2d)) % juhitevuse matriksi astak

```

```

function []=scopeplot(ScopeData)
% SCOPEPLOT(Structure_with_time)
% Plotib simulatsiooni tulemuste Scope'is(Data history'na) Workspace-
i salvestatud signaalid
% Strucrure_with_time - nimetatud tüüpi signaalide muutuja
(struktuur)
% koostanud: A.Rähni, täiendanud E.Petlenkov

if exist('ScopeData'),
    sign_arv=size(ScopeData.signals,2);
    for iiii=1:sign_arv,
        subplot(sign_arv,1,iiii);
        joonte_arv=ScopeData.signals(iiii).dimensions;
        for jjjj=1:joonte_arv
            if ScopeData.signals(iiii).plotStyle(jjjj)==0,

plot(ScopeData.time,ScopeData.signals(iiii).values(:,jjjj));
                hold all
            else

stairs(ScopeData.time,ScopeData.signals(iiii).values(:,jjjj))
                hold all
            end
        end
        ylabel(ScopeData.signals(iiii).label), grid
    end
else
    disp('puudub funktsiooni sisendmuutuja')
end

```