

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL

PEETER LOORENTS, VLADIMIR VIIES

**LÜHIÜLEVAADE IT ALAL OLULISEMATEST
HULGATEOORIA MÕISTETEST**

TALLINN

EESSÕNA.

Andmebaaside teooriast on teada, et näiteks relatsiooniliste andmebaaside korral on tegemist sisuliselt andmeid esitavatest tekstide hulkadest moodustatud Cartesiuse korrutiste teatavaid tingimusi rahuldavate osahulkadega ehk sisuliselt teatavate relatsioonidega. Objektorienteeritud andmebaaside korral on aga andmeid esitavad tekstid omavahel seotud teatavate järjestusseostega.

Siit järeldeb, et näiteks andmebaaside teoreetilisi küsimusi käsitledes tuleb meil tahes tahtmata selgusele jõuda, et mida kujutavad endast seosed ning Cartesiuse korrutised, mille osahulkadeks seosed on. Cartesiuse korrutised omakorda määratletakse lähtudes korteeži mõistest. Jne, jne.

Eelõeldu põhjal näeme, et pole paha võimaluse korral, *enne* tutvumist näiteks andmebaaside teooriaga või mõne muu IT alase ainega, veidi värskendada oma teadmisi põhiliste hulgateoreetiliste mõistete ja tulemuste osas, millele on nii ehk teisiti vaja edaspidi tugineda. Just see on tinginud käesoleva õppevahendi materjali valiku ja esitusviisi. Ja nimelt:

Vaatluse alla võetakse allpool suhteliselt kitsas hulgateoreetiliste mõistete kogum, millesse kuuluvad esialgu vaid elemendiks olemise, võrdsuse ja osahulgaks olemise seosed ning lihtsamate hulgateoreetiliste konstruktsioonide mõisted ja mõned olulisemad tulemused (mille tõestused tuuakse vaid lihtsaimatel juhtudel).

Hiljem jätkub käsitus tuginedes juba korteeži mõistele. See võimaldab määratleda läbi Cartesiuse korrutise seose mõiste.

Õppevahendi lõpus vaadeldakse mõningaid olulisemaid binaarseid seoseid, nagu ühesed ja üks-ühesed vastavused, ekvivalentsuse ja järjestuse seosed.

Esitatav materjal, mis on jaotatud kümneks lühikeseks paragrahviks, sisaldab loodetavasti piisaval määral näiteid. Samuti küsimusi ja ülesandeid iseseisvaks tööks, mis pole nii keerulised, et nõuaksid lahendamiseks suuri pingutusi ja lisamaterjalide kasutamist. Seetõttu võiks lugeja enesekontrolli mõttes proovida eelmainitud küsimuste ja ülesannetega siiski tegeleda. Kahjuks see mingil juhul ei tule.

§1. HULKADE ELEMENDIKS OLEMINE.

Käesolevas paragrahvis vaatleme tuginedes *elemendiks olemise seosele* seda, mida tähendab *ühe hulga olemine mingi teise hulga elemendiks*. Sellega seoses käsitleme niisuguseid olulisi mõisteid nagu *tühi hulk* (see on hulk, milles elemente pole), *üksik* (ehk hulk, milles on täpselt üks element), *paar* (hulk, milles on kaks elementi) ning lõpuks seda, millised on *võrdsed hulgad* (st hulgad, millel on ühesugused elemendid ehk ühed ja samad elemendid).

Definitsioon 1. *Hulga X olemine hulga Y elemendiks* tähendab seda, et kõnealused hulgad on omavahel seotud *elemendiks olemise seosega* $\in$, mida seejuures loetakse *fundamentaalseoseks* ehk seoseks, *mida ei defineerita*. Kui hulk X on hulga Y elemendiks, siis kirjutatakse $X \in Y$. Kui hulk X *ei ole* hulga Y elemendiks, siis kirjutatakse kas $\neg(X \in Y)$ või veidi lühemalt $X \notin Y$.

Märkus. Kui mingi hulga moodustamine on meie teha, siis on ühtlasi ka meie otsustada, millised elemendid kõnealusesse hulka kuuluvad ja millised mitte. Igal juhul aga tuleb meil silmas pidada, et kuidas me vaadeldavaid objekte ka nimetada ei sooviks – ikka on elementide korral tegemist hulkadega (ehk teiste sõnadega, *kui oleme otsustanud, et mingi M peab elemendina kuuluma teatavasse hulka H , siis oleme ühtlasi otsustanud, et M on hulk*)!

Kokkulepe. Esitamata siinkohal määratlusi sellele, mis on lõplik hulk ja mis on naturaalarv, lepime kokku, et iga lõpliku hulga A korral on meil teada selle hulga elementide arv, mida tähistame sümboliga $E(A)$.

Definitsioon 2. Hulka, milles ei esine mitte ühtegi elementi, nimetatakse *tühjaks hulgaks* ja tähistatakse sümboliga $\emptyset$.

Näide 1. Kui olete ametis uue, alles loomisjärgus oleva firma personaliosakonnas ning teil tuleb luua töötajate andmebaas allüksuste kaupa, siis võib juhtuda, et mõne allüksuse (näiteks IT osakonna) töötajate nimekiri on esialgu tühi hulk, kuni kedagi pole veel kõnealusesse osakonda tööle võetud.

Näide 2. Kõikide arvust 2 väiksemate algarvude hulk on tühi, kuna ühtegi niisugust arvu pole olemas. (Tuletame meelde, et algarvude hulka kuuluvad sellised ühest suuremad naturaalarvud, mis jaguvad täpselt ainult arvuga 1 ja iseendaga. Seega on algarvudeks 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,)

Tühja hulga olemasolu tuleneb asjakohasest põhipostulaadist (vt näit [1] II §2.):

Tühja hulga olemasolu aksioom. Leidub selline hulk – *tühi hulk*, mille elemendiks ei saa olla mitte ükski hulk.

Märkus 1. Asjaolu, et tühja hulga elemendiks ei saa olla mitte ükski hulk, ei välista seda, et *tühi hulk ise võib olla mingite teiste hulkade elemendiks*.

Märkus 2. Tuginedes eespool sõlmitud kokkuleppele võime kirjutada, et $E(\emptyset) = 0$. Ehk sõnaliselt väljendusvormis: *tühja hulga elementide arv on null*. Tühjast hulgast edasi liikudes on loomulik vaadelda ühe- ja kaheelemendilisi hulki. Ka nende olemasoluks on vajalikud teatavad põhipostulaadid.

Üheelemendiliste hulkade olemasolu aksioom. Mistahes hulga X korral eksisteerib niisugune hulk, mille ainsaks elemendiks on hulk X ja mida edaspidi nimetame *hulgast X koosnevaks üksikuks* ning tähistame sümboliga $\{X\}$.

Mistahes hulgast H moodustatud üksiku $\{H\}$ korral kehtib võrdus $E(\{H\}) = 1$. Ehk teiste sõnadega – *mistahes üksiku elementide arv on alati 1*.

Näide 1. Kui alles loomisjärgus oleva firma IT osakonda võeti palgale esimene ja esialgu ainus inimene, siis koosneb selle osakonna töötajate nimekiri kui hulk täpselt ühest elemendist.

Näide 2. Täringu tahkudel olevate niisuguste silmade hulk, mille elementideks on nn täiskuubid (ehk naturaalarvud $n = m^3$) on üheelemendiline hulk $\{1\}$, mille ainsaks elemendiks on arv 1.

Märkus. Hulgateooria alases kirjanduses reeglina ei postuleerita üheelemendiliste hulkade olemasolu. Kõnealune tõsiasi ehk asjaolu, et mistahes hulga X korral on $\{X\}$ samuti hulk, järeldatakse allpool vaadeldavast paariaksioomist (vt näit [1] ptk II, §2.).

Kaheelemendiliste hulkade olemasolu aksioom (paariaksioom). Mistahes kahe hulga A ning B korral eksisteerib selline hulk, mille elementideks on ainult hulgad A ning B ja mida edaspidi nimetame *hulkadest A ning B koosnevaks paariks* ja tähistame sümboliga $\{A, B\}$.

Näide 1. Kui firma IT osakonda on tööle võetud kaks inimest (ja rohkem seal esialgu inimesi ei tööta), siis on selle osakonna töötajate nimekiri kui hulk kaheelemendiline.

Näide 2. Täringu viskamisel esile tulla võivate täisruuduliste (tuletame meelde, et täisruutudeks on sellised naturaalarvud n , mille korral $n = m^2$) silmade hulk on paar $\{1, 4\}$.

Märkus. Eelnevate asjade üle mitte väga põhjalikult mõeldes võib tekkida kiusatus väita, et mistahes paari elementide arv on alati 2. Paraku see nii *alati ei ole!* Tõepoolest, paari määratluses ei nõutud, et paari moodustavad hulgad peaksid ilmtingimata teineteisest erinema. Seetõttu jääb võimalus, et paaris esineb tegelikult ainult üks element. Niisugusel juhul on kasulik kokku leppida järgnevas:

Kokkulepe. Mistahes hulga X korral ütleme, et paari $\{X, X\}$ ja üksiku $\{X\}$ näol on tegemist ühe ja sama hulgaga.

Selleks, et põhjendada eespool nimetatud väidet üksiku olemasolu järelдумisest paariaksioomist (ja veel teisigi olulisi tõsiasju) formuleerime veel ühe vajaliku põhipostulaadi, mida kirjanduses nimetatakse eksistentsiaalsuse aksioomiks (vt näit [2] ptk II, §2).

Eksistentsiaalsuse aksioom. Kui hulk H ning hulk K koosnevad ühtedest ja samadest elementidest, siis on H ning K näol tegemist ühe ja sama hulgaga. Sellisel juhul kõneldakse, et ***hulgad H ning K on omavahel võrdsed*** ja kirjutatakse $H = K$. Kui hulgad H ning K *ei ole* omavahel võrdsed (ehk *ei koosne ühtedest ja samadest elementidest*), siis kirjutatakse $\neg(H=K)$ ehk veidi lühemalt $H \neq K$.

Näide 1. Mistahes hulga X korral $\{X, X\} = \{X\}$.

Näide 2. Olgu H kõikide selliste inimeste hulk, kes pole naised ja olgu K kõikide meeste hulk. Tavatähenduse raames võib ilmselt väita, et kõnealused hulgad koosnevad ühtedest ja samadest elementidest, mistõttu $H = K$.

Näide 3. Olgu N kõikide võrdnurksete kolmnurkade hulk ja olgu K kõikide võrdkülgsete kolmnurkade hulk. Kooligeomeetriast on teada, et tegemist on ühe ja sama hulgaga, kuna kõik võrdnurksed kolmnurgad on ühtlasi võrdkülgsed ja vastupidi – kõik võrdkülgsed kolmnurgad on ühtlasi võrdnurksed. Seega võime kirjutada, et $N = K$.

Näide 4. Fibonacci arvudeks (13. saj itaalia matemaatiku Leonardo Fibonacci järgi) nimetatakse arve $f(0), f(1), f(2), f(3), \dots$, kus $f(0)=1, f(1)=1, f(n+2) = f(n+1) + f(n)$. Seega on Fibonacci arvudeks 1, 2, 3, 5, 8, Algarvudeks nimetatakse ühest suuremaid naturaalarve, mis jaguvad täpselt vaid iseenda ja arvuga 1. Seega on algarvudeks 2, 3, 5, 7, 11, Olgu nüüd hulgaks U täringu viskamisel esile tulla võivate kõikide selliste silmade hulk, mis on ühtlasi ühest suuremateks Fibonacci arvudeks. Ja olgu hulgaks L täringu viskamisel esile tulla võivate kõikide selliste silmade hulk, mis on ühtlasi algarvudeks. Nagu näeme – on antud juhul tegemist ühe ja sama hulgaga $\{2, 3, 5\}$ ehk $U = L$.

Märkus. Olenevalt autorist ja kirjutisest käsitletakse hulkade võrdust vahel fundamentaalseosena (st seosena, mida ei defineerita. Vt näit [2] ptk II. §2), vahel aga seosena, mida defineeritakse lähtudes teistest seostest (vt näit [3] §1).

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Mida tähendab see, et mingi seos on fundamentaalseos?
2. Kumb kahest järgnevalt nimetatud seosest ***ei ole*** fundamentaalseos: *elemendiks olemise seos* ning *osahulgaks olemise seos*?
3. Tõestage, et suvalise hulga H korral kehtib võrdus $\{H, H\} = \{H\}$. Soovitus: lugege hoolega definitsioone ja eksistentsiaalsuse aksioomi formuleeringut.
4. Defineerige kolmeelemendiline hulk.
5. Mitu elementi kuulub hulka $\emptyset$?

6. Mitu elementi kuulub tühjast (st *mitte ühtegi elementi sisaldavast*) hulgast moodustatud üksikusse $\{\emptyset\}$?
7. Mitu elementi kuulub hulka $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$?
8. Kas võrdus $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ on õige?
9. Kas võrdus $\emptyset = \{\emptyset\}$ on õige?
10. Mida oskate öelda hulga T kohta, mille elementideks peaksid olema võrdkülgsed ja täisnurksed kolmnurgad?

§2. OSAHULGAD.

Käesolevas paragrahvis vaatleme seda, mida tähendab ühe hulga olemine mingi teise hulga osahulgaks. Seejuures vaatleme veidi osahulkade elementide arvuga seotud küsimusi ning hulki, mille elementideks on osahulgad.

Definitsioon 1. Ütleme, et *hulk A on hulga B osahulgaks*, kui iga element hulgast A kuulub elemendina ühtlasi ka hulka B. Kui hulk A on hulga B osahulk, siis kirjutame $A \subseteq B$.

Näide 1. Kui M on kõikide meeste hulk ja H on kõikide inimeste hulk, siis $M \subseteq H$.

Näide 2. Kui T on kõikide täisnurksete kolmnurkade hulk ja K on kõikide hulknurkade hulk, siis $T \subseteq K$, kuna iga kolmnurk (sh täisnurkne kolmnurk) on ühtlasi hulknurk.

Näide 3. Kui A on kõikide algarvude hulk ja P on kõikide paaritute arvude hulk, siis pole õige, et $A \subseteq P$, kuna mitte iga algarv pole samal ajal paaritu arv! Tõepoolest – algarvude hulgast leiame arvu 2, mis on ju paarisarv.

Teoreem 1. Iga hulk on iseenda osahulgaks ehk mistahes hulga H korral $H \subseteq H$.

Tõestus. Järeldub vahetult definitsioonist.

Teoreem 2. Tühi hulk on mistahes hulga osahulgaks ehk mistahes H korral $\emptyset \subseteq H$.

Tõestus. Mingi esimese hulga mõne teise hulga osahulgaks olemise määratlus on loogiliselt samaväärne sellega, et suvaline element, mis ei kuulu teise hulka, ei saa kuuluda ka esimesse hulka. Kui esimeseks hulgaks võtta tühi hulk, millesse ei kuulu üldse ühtegi elementi, siis on eespoolmainitud määratluse loogiline osa korrektselt täidetud.

Järeldus 1. Tühjal hulgal pole küll elemente, kuid tal on täpselt üks osahulk – ta ise.

Järeldus 2. Mistahes *mittetühjal hulgal* on vähemalt kaks erinevat osahulka – ta ise ja tühi hulk.

Kasutades nn induktsiooni meetodit saab tõestada, et

Teoreem 3. Kui lõplike hulkade X ning Y korral $X \subseteq Y$, siis $E(X) \leq E(Y)$.

Märkus. Sellest, et mingite hulkade X ja Y korral $E(X) \leq E(Y)$, ei järeldu, et $X \subseteq Y$!

Definitsioon 2. Mittetühja lõpliku hulga M, mille elementide arv on n osahulka, mis koosneb k elemendist, kus $k \leq n$, nimetame *hulga M elementide kombinatsiooniks*.

Matemaatika selles osas, mida nimetatakse kombinatoorikaks (vt näiteks [4]), tõestatakse järgmine väide

Teoreem 4. Kui mingis hulgas on n elementi, siis selle kõikide k -elemendiliste kombinatsioonide arv C_n^k võrdub arvuga $k!/(n-k)!n!$, kus sümboliga $m!$ tähistatakse korrutist $m(m-1)(m-2) \dots 1$.

Näide 1. Hulga $\{a, b, c, d, e\}$ kõikide kolmeelemendiliste kombinatsioonide arv on $5!/(5-3)!3! = 120/2!3! = 120/12 = 10$. Tõepoolest – loetleme vastavad kombinatsioonid: $\{a, b, c\}$ $\{a, b, d\}$ $\{a, b, e\}$ $\{a, c, d\}$ $\{a, c, e\}$ $\{a, d, e\}$ $\{b, c, d\}$ $\{b, c, e\}$ $\{b, d, e\}$ $\{c, d, e\}$.

Näide 2. Hulga $\{\Delta, \square, O\}$ kõikide kaheelemendiliste kombinatsioonide arv on $3!/(3-2)!2! = 6/1!2! = 6/2 = 3$. Tõepoolest – loetleme vastavad kombinatsioonid: $\{\Delta, \square\}$ $\{\Delta, O\}$ $\{\square, O\}$.

Näide 3. Hulga $\{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$ kõikide üheelemendiliste kombinatsioonide arv on $4!/(4-1)!1! = 24/3!1! = 24/6 = 4$. Tõepoolest – loetleme vastavad kombinatsioonid: $\{\clubsuit\}$ $\{\diamond\}$ $\{\heartsuit\}$ $\{\spadesuit\}$.

Definitsioon 3. Hulga H kõikide osahulkade hulka nimetatakse *hulga H astmehulgaks* ning tähistatakse sümboliga 2^H .

Seda, et mistahes hulgal *tõepoolest leidub* astmehulk, garanteerib järgmine postulaat:

Astmehulga aksioom. Mistahes hulga A korral leidub selline hulk, mille elementideks on kõik hulga A osahulgad.

Kasutades induktsiooni meetodit pole raske tõestada järgmist väidet:

Teoreem 5. Kui hulgas A on m elementi, siis astmehulgas 2^A on 2^m elementi. Ehk lühemalt – kui $E(A) = m$, siis $E(2^A) = 2^m$.

Käesoleva paragrahvi lõpetuseks vaatleme osahulgaks olemise ning võrduse seost.

Teoreem 6. Kahe hulga võrdsus on samaväärne sellega, et esimene võrdsetest hulkadest on teise osahulk ning samal ajal teine on esimese osahulk. Ehk lühemalt $X=Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y \ \& \ Y \subseteq X)$.

Tõestus. Tuleneb vahetult hulkade võrdsuse ja osahulkade määratlustest.

Märkus. Äsjasõnastatud teoreemi alusel on võimalik tuvastada mitmesuguste hulkade võrdsust. See käib just nii, et kõigepealt näidatakse iga esimese hulga elemendi kuulumist elemendina teise hulka ning seejärel näidatakse, et iga teise hulga element kuulub elemendina esimesse hulka (st näidatakse, et esimene hulk on teise osahulk ja siis vastupidi – et teine hulk on esimese osahulgaks).

Järeldus. Kui A on tühi hulk ja B on tühi hulk, siis $A = B$.

Tõestus. Eelnevast teame, et tühi hulk on *mistahes teise hulga* osahulgaks. Seetõttu võime tühjade A ning B korral kirjutada, et $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$. Siit saamegi, et $A = B$.

Märkus. Äsja võisime sisuliselt veenduda, et *kõikide hulkade seas eksisteerib täpselt üks hulk, mis on tühi*.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Kas on õige, et leiduvad sellised hulgad A ning B , mille korral, kui $A \in B$, siis $A \subseteq B$? (Soovitus: moodustage näiteks hulk, mille elemendiks on $\emptyset$.)
2. Kas on võimalik, et mingi hulga mõni osahulk on ühtlasi selle hulga elemendiks?
3. Kui palju on kümneelemendilisel hulgal kümneelemendilisi kombinatsioone?
4. Tühjas hulgas pole mitte ühtegi elementi. Mitu elementi on tühja hulga astmehulgas?
5. Kirjeldage hulka, mille astmehulk koosneb viiest elemendist. (Soovitus: uurige hooliga astmehulga määratlust ja teoreemi 5.)
6. Kas üleüldse leidub sellist hulka, mille astmehulga elementide arv on paaritu arv? (Soovitus: vaadake ülesannet 4, tuletage meelde astmehulga määratlust ja teoreemi 5)
7. Kui suur on kolmeelemendilise hulga mittetühjade osahulkade arv?
8. Kuidas muutub astmehulga elementide arv, kui lisaksime hulgale juurde vaid ühe uue elemendi?
9. Kas on võimalik, et mingite hulkade X ning Y korral $2^X \neq 2^Y$, kuigi samas $X = Y$?
10. Kas on võimalik, et mingite hulkade X ning Y korral $2^X = 2^Y$, kuigi samas $X \neq Y$?

§3. OSAHULKADE VÄLJAERALDAMINE.

Antud paragrahvis keskendume sellele, kuidas toimub hulkade moodustamine nn osa väljaeraldamise teel. Niisugune hulkade tekitamise ja nende elementide kirjeldamise viis on eriti oluline mitmesuguste andmebaasidega tegelemisel.

Definitsioon 1. *Hulgast H tingimuse T alusel väljaeraldatud osaks* nimetame sellist hulka, mille moodustavad kõik niisugused hulga H elemendid, mis rahuldavad tingimust T .

Näide 1. Kõikide meeste hulka M võime käsitleda, kui kõikide inimeste hulgast sellise tingimuse T alusel väljaeraldatud osa, mille korral tingimuse T täidetud inimese i jaoks ehk lühemalt $T(i)$ tähendab seda, et inimene i pole naine.

Näide 2. Kõikide paaritute arvude hulka P võime käsitleda, kui kõikide naturaalarvude hulgast N sellise tingimuse S alusel väljaeraldatud osa, mille korral tingimuse S täidetud naturaalarvu m korral tähendab seda, et mingi sobiva naturaalarvu n korral kehtib võrdus $m = 2n + 1$.

Kokkulepe. Hulgast H tingimuse T alusel väljaeraldatud osa esitamiseks kasutatakse järgmist kirjaviisi: $\{ \alpha \mid (\alpha \in H) \ \& \ T(\alpha) \}$.

Illustreerimaks äsja kokkulepitud kirjaviisi, kasutame eelnevalt toodud näiteid:

Näide 1. Kõikide meeste hulk $M = \{ i \mid (i \in H) \ \& \ \text{"i pole naine"} \}$ ehk veidi lühemalt $M = \{ i \mid (i \in H) \ \& \ \neg \text{♀}(i) \}$, kus kirjutist $\neg \text{♀}(i)$ võiksime lugeda järgmiselt “*pole õige, et i on naine*”.

Näide 2. Kõikide paaritute arvude hulk $P = \{ \alpha \mid (\alpha \in N) \ \& \ (\exists \beta \in N)[\alpha = 2\beta + 1] \}$, kus kirjutist $(\exists \beta \in N)[\alpha = 2\beta + 1]$ võiksime lugeda järgmisel viisil: “*leidub selline naturaalarv β , mille korral $\alpha = 2\beta + 1$* ”.

Hulgateooriast on teada, et osahulkade väljaeraldamisel tuleb olla väga tähelepanelik tingimuste formuleerimisel. Samuti tuleb alati silmas pidada seda, et millisest kohast pärinevad vastavat tingimust rahuldavad elemendid: nimelt peavad kõik sedalaadi elemendid ilmtingimata pärinema mingist *eelnevalt juba teadaolevast hulgast*. Vastasel korral pole välistatud, et tekivad mitmetimõistetavused või lausa paradoksid (vt näiteks “Habemeajaja paradoks” [5]). Järgnevalt esitamegi asjakohase postulaadi:

Väljaeraldamise aksioom. Kui H on hulk ja elementidele x esitatavat tingimust väljendab hulgateooria valem $T(x)$, siis $\{ x \mid (x \in H) \ \& \ T(x) \}$ on hulk.

Märkus 1. Tingimus T võib erijuhul seisneda nõudes kuuluda elemendina mingisse hulka K . Niisugusel juhul oleks hulgast H väljaeraldatud osaks hulk $\{ x \mid (x \in H) \ \& \ (x \in K) \}$.

Märkus 2. Kui on eelnevalt teada, millise hulga elementide seast toimub tingimust T rahuldavate elementide välja eraldamine, siis jäetakse $(x \in H)$ kirjutamata ning piirduakse kirjutisega $\{x \mid T(x)\}$.

Näide 1. Kõikide meeste hulk: $M = \{i \mid \neg \varphi(i)\}$.

Näide 2. Kõikide paaritute arvude hulk $P = \{\alpha \mid (\exists \beta \in \mathbb{N})[\alpha = 2\beta + 1]\}$.

Näide 3. Et selgitada, kellele tasuks saata kutseid tulla võitlema “Tudengimiss TTÜ” tiitli eest, võiks alustada sellest, et eraldada kõikide TTÜ koosseisu kuuluvate inimeste hulgast välja kõik need inimesed i , kelle korral

$[B(i) \vee M(i)] \& W(i) \& K(i)$, kus

B – väljendab bakalaureuseõppesse kuulumist

M – väljendab magistriõppesse kuulumist

W – väljendab vallalisust

K – väljendab sobivat vanust (kuni ...kümneaastane).

Järeldus. Kui hulga H ning tingimuse T korral on teada, et $H = \{x \mid T(x)\}$, siis väide, et mingi m on hulga H element on loogiliselt samaväärne väitega, et m rahuldab tingimust T ehk lühemalt $m \in H \Leftrightarrow T(m)$.

Praktiline järeldus. Kui on teada, et $\{x \mid T(x)\}$, siis *ülesanne* leia kõik sellised objektid, mis kuuluvad hulka H *on samaväärne ülesandega* leia kõik sellised objektid, mis rahuldavad tingimust T .

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Mida on vaja hulkade esitamisel kirjutisega $\{x \mid T(x)\}$ hoolega silmas pidada?
2. Esitage väljaeraldatud osana kõikide paarisarvude hulk.
3. Esitage väljaeraldatud osana kõikide algarvude hulk.
4. Oletame, et peate elanikeregistrit kasutades koostama Riigikogu valijate nimekirja. Kas sellisel juhul on Teil tegemist osa väljaeraldamisega? Kui jah, siis (A) millisest hulgast toimub elementide välja eraldamine ning (B) milline on vastav tingimus?
5. Uurige välja, milles seisneb “Habemeajaja paradoks”. Seejärel kujutlege, et Teie “kõige kõrgemad” ülemused on tüdinenud tarkvara loomisega tegeleva osakonna “patsiga poiste” korralikult dokumenteerimata programmidest ja on andnud kurja käsu, mille täitmise püüdlused aga tekitavad paradoksaalse olukorra? Milline võiks olla kõnealuse käsu sõnastus?
6. Kirjeldage väljaeraldatava osana kõikide selliste Eesti Vabariigis viibivate inimeste hulka, kellel on Eesti Vabariigi territooriumil õigus osaleda liikluses mootorsõidukit juhtides.

§4. HULKADE ÜHISED JA MITTEÜHISED OSAD.

Vaadeldes mitmesugustest objektidest moodustatud kogumeid on tihti vaja lahendada järgmised probleemid:

1. Millised objektid võiksid kuuluda nii “sinna kui tänna”?
2. Millised objektid kuuluvad “sinna”, kuid samas “tänna” ei kuulu?
3. Millised objektid kuuluvad kas “sinna või tänna”, kuid ei kuulu mitte mingil juhul mõlemasse korraga?

Esimese probleemi lahendamine seisneb hulgateoreetilises plaanis *hulkade ühisosa* leidmises, teise probleemi lahendamine seisneb *hulkade vahe* leidmises. Vastuse kolmandale küsimusele aga leiame ülejäärmisest paragrahvist. Järgnevalt vaatlemegi kahe ülalnimetatud operatsiooni määratlusi.

Definitsioon 1. Hulkade X ning Y *ühisosaks* nimetatakse hulka, mille elementideks on kõik niisugused objektid, mis on ühtaegu nii X kui Y elementideks. Hulkade X ja Y ühisosa tähistatakse sümboliga $X \cap Y$. Eelnevale tuginedes võime siinkohal kirjutada, et $X \cap Y = \{ \alpha \mid (\alpha \in X) \& (\alpha \in Y) \}$.

Järeldus. Kui eelnevalt on teada, hulga X moodustavad kõik sellised objektid, mis rahuldavad tingimust T ja hulga Y moodustavad kõik sellised objektid, mis rahuldavad tingimust S , siis võime kirjutada, et $X \cap Y = \{ \alpha \mid T(\alpha) \& S(\alpha) \}$.

Näide 1. Otsides sobivaid kandidaate Tehnikaülikooli meeskoori peaksieme Tehnikaülikooli peres vaatlema inimesi, kes rahuldavad korraga kahte tingimust: (T) on mees ja (S) suudab laulda.

Näide 2. Noormeesteks on kõik sellised inimesed, kes on noored ja samas ka mehed.

Näide 3. $\{ \clubsuit, \diamond, \heartsuit, \square, \circ \} \cap \{ \heartsuit, \diamond, \spadesuit, \circ, \square, \Delta, \spadesuit \} = \{ \diamond, \square, \circ \}$.

Näide 4. $\{ \text{Eva, Ave, Anu, Ivo} \} \cap \{ \text{Ülo, Ivo, Ave} \} = \{ \text{Ave, Ivo} \}$.

Märkus. Ühiste elementide otsimise korral ei pea piirduma ainult kahe hulgaga. Vajaduse korral võib vaadelda kolme ja enamagi hulga ühisosa. Näiteks $X \cap Y \cap Z$ või $M \cap N \cap P \cap K$ vms. Sellisel juhul on meil sisuliselt vaja tegelda ka vastavate tingimuste üheaegse täidetuse probleemiga (*mingi element kuulub vaatlusaluste hulkade ühisosasse, kui kõikide hulkadega seotud asjakohased tingimused on just selle elemendi korral täidetud*). Ehk teiste sõnadega – mingi element α kuulub näiteks ühisosasse $X \cap Y \cap Z$ siis ja ainult siis, kui konjunktsioon $T(\alpha) \& S(\alpha) \& U(\alpha)$ on õige (kus T, S, U on hulkadesse X, Y, Z kuulumise tingimused).

Näide 5. Selleks leida üles kõik eesti rahvusest Nobeli füüsikapreemia laureaadid, on vaja kindlaks teha need inimesed m , kelle korral on õige järgmine konjunktsioon:

$E(m) \& N(m) \& F(m)$, kus E väljendab eesti rahvust, N märgib Nobeli laureaadiks olemist ja F esitab eriala, milleks antud juhul on füüsika. (Füüsikud kõnelevad, et vaadeldav hulk pole sugugi tühi, kuna 1958 aastal Nobeli füüsikapreemia pälvinud Igor Jevgenjevitsš Tamm olevat rahvuselt siiski eestlane.)

Näide 6. Üksikemade hulka kuuluvad kõik need inimesed, kes

- on naised
- omavad last
- ei oma abikaasat.

Järgnevalt uurime kuidas antud hulgast välja eraldada sellised elemendid, mis kuuludes vaadeldavasse hulka ei kuulu samas teatavasse teise hulka.

Definitsioon 2. Hulkade X ning Y *vaheks* nimetame hulka X kõikide selliste elementide hulka, mis ei kuulu elemendina hulka Y . Tähistades hulkade X ning Y vahe sümboliga $X - Y$ võime kirjutada, et $X - Y = \{ \alpha \mid (\alpha \in X) \& (\alpha \notin Y) \}$. Kui seejuures on teada, et $X = \{ \alpha \mid T(\alpha) \}$ ning $Y = \{ \alpha \mid P(\alpha) \}$, siis $X - Y = \{ \alpha \mid T(\alpha) \& \neg P(\alpha) \}$.

Näide 1. Apoliitiliste meeste hulga moodustavad kõik sellised inimesed, kes

- on mehed ja
- ei tegele poliitikaga.

Näide 2. $\{ \clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit, \square, \circ \} - \{ \heartsuit, \diamond, \clubsuit, \circ, \square, \Delta, \spadesuit \} = \{ \clubsuit, \diamond \}$.

Näide 3. Kõikide isekülgsete kolmnurkade hulga IK saame sel teel, kui lahutame kõikide kolmnurkade hulgast K ära kõikide võrdkülgsete kolmnurkade hulga VK . Ehk lühemalt $IK = K - VK$.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Milline hulk on kõikide paarisarvude hulga ja kõikide algarvude hulga ühisosaks?
2. Milline hulk on kõikide paarisarvude hulga ja kõikide arvu 2 kõikide naturaalarvuliste astmete (st arvude, millel on kuju 2^n) ühisosa?
3. Milline hulk on kõikide ristkülikute hulga ja kõikide rombide hulga ühisosa?
4. Milline hulk on nn normaaltingimustel kõikide vedelike hulga ja kõikide metallide hulga ühisosa?
5. Nimetage mõned elemendid, mis kuuluvad purjede abil liikuvate sõidukite hulka, kuid ei kuulu samas laevade hulka?
6. Loetlege kõik elemendid, mis kuuluvad algarvude hulka, kuid samas ei kuulu paaritute arvude hulka.

§5. UNIVERSAALNE HULK JA TÄIENDHULK.

Mitmete praktiliste ülesannete ja teoreetiliste probleemide uurimisel on eelnevalt teada, et mis laadi objektidega meil üleüldse tegemist saab olla. Teiste sõnadega – on mingi valdkond, millest pärinevad kõik *teataval konkreetsel juhul* lahendatavate ülesannete ja uuritavate probleemidega seotud asjad. Nii näiteks on aritmeetikas vaadeldavateks objektideks arvud, määramängus aga mänguseisud (ehk malendite reeglitekohased paiknemised mänguväljadel). Niisuguste olukordade juures on hilisemate võimalike segaduste vältimiseks kasulik kõikide vaadeldavate objektide, asjade vms hulk eelnevalt ära fikseerida.

Definitsioon 1. Kui on eelnevalt kokku lepitud, et edaspidi vaadeldavate probleemide ja ülesannetega seotud asjad, objektid jms pärinevad kõik mingist ühest ja samast hulgast, siis nimetatakse sellist hulka *antud käsitluses* **universaalseks hulgaks**.

Järeldus. Kui universaalne hulk on fikseeritud, siis osutuvad kõik vaadeldavatest objektidest moodustatavad hulgad selle universaalse hulga osahulkadeks.

Näide 1. Mingi piirkonna elanikke registris kajastub selle piirkonna elanikkond P . Vaadeldes edaspidi ainult selle piirkonna elanikke näeme, et vastavas piirkonnas elavad pensionärid, alaealised, invaliidid, rikkurid jt moodustavad kõik selliseid hulki, mis on hulga P , kui antud juhul universaalse hulga osahulkadeks.

Näide 2. Planimeetrias võime universaalseks hulgaks lugeda vaadeldava tasandi kõikide punktide hulka. Sellisel juhul on iga planimeetrias vaadeldav kujund (kui punktihulk) käsitletav kõnealuse universaalse hulga osahulgana.

Fikseerime nüüd mingi universaalhulga U .

Definitsioon 2. Kui hulk H on moodustatud *ainult* hulga U kuuluvatest elementidest (st kui $H \subseteq U$), siis nimetatakse vahet $U - H$ hulga H **täiendhulgaks** ehk lihtsamalt **täiendiks** ning tähistatakse sümboliga H' .

Näide 1. Olgu vaadeldaval juhul universaalhulgaks mingi piirkonna kõikide elanike hulk ja olgu N kõikide selles piirkonnas elavate naissoost inimeste hulk ning M kõikide selles piirkonnas elavate meessoost inimeste hulk. Niisugusel juhul kehtivad võrdused $N' = M$ ja $M' = N$.

Näide 2. Olgu nüüd universaalhulgaks kõikide naturaalarvude hulk. Kui A on kõikide paarisarvude hulk ja B on kõikide paaritute arvude hulk, siis kehtivad võrdused $A = B'$ ning $B = A'$.

Teoreem 1. Mistahes universaalhulga elementidest moodustatud hulga H korral kehtib võrdus $(H')' = H$. Ehk teiste sõnadega hulga **kahekordne täiend** (mida lühidalt tähistatakse sümboliga H'') võrdub hulga endaga.

Tõestus. Tuleneb vahetult definitsioonidest.

Näide 1. Olgu vaadeldaval juhul universaalhulgaks mingi piirkonna kõikide elanike hulk ja olgu N kõikide selles piirkonnas elavate naissoost inimeste hulk ning M kõikide selles piirkonnas elavate meessoost inimeste hulk. Niisugusel juhul kehtivad võrdused $M'' = M$ ja $N'' = N$.

Näide 2. Olgu nüüd universaalhulgaks kõikide naturaalarvude hulk. Kui A on kõikide paarisarvude hulk ja B on kõikide paaritute arvude hulk, siis kehtivad võrdused $A = A''$ ning $B = B''$.

Märkus. Äsjavaadeldud teoreemi üks sisuline aspekt on seotud hulkade esitamise ehk kirjeldamise loogikaga. Nimelt, kui teame, et $H = \{ \alpha \mid T(\alpha) \}$, siis $H' = \{ \alpha \mid \neg T(\alpha) \}$. Sellisel juhul $H'' = \{ \alpha \mid \neg\neg T(\alpha) \}$. Kuna loogikast on teada (vt näit [L] lk 54), et *mistahes tingimuse T kahekordne eituse $\neg\neg T$ on loogiliselt samaväärne tingimuse T endaga*, siis saamegi kirjutada, et $H'' = \{ \alpha \mid \neg\neg T(\alpha) \} = \{ \alpha \mid T(\alpha) \} = H$.

Eelöeldust tulenevalt on hulkade kirjeldamisel vahel kasulik mõelda, et vastavate tingimuste formuleerimisel kahekordsele eitusele viitavad nõuded nagu näiteks ... *kõik sellised objektid, mille korral pole õige, et tingimus T pole täidetud* ... viitavad tegelikult veidi tarbetule lisatööle.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Vaatleme tasandit kui universaalset hulka ja vaatleme ringi kui punktihulka. Kuidas kujutlete ringi täiendit?
2. Olgu universaalhulgaks mingi piirkonna kõikide elanike hulk. Kes kuuluvad selles piirkonnas elavate kõikide täisealiste inimeste hulga täiendisse?
3. Järgnevalt tegeleme naturaalarvudega. Olgu A kõikide algarvude hulk ja olgu K kõikide kordarvude hulk. Kas on õige, et $A' = K$?
4. Vaatleme veel naturaalarve. Millised elemendid *ei kuulu* hulga $\{0, 1\}$ täiendisse?
5. Uurime mingi piirkonna elanike registrit. Kas on õige, et kehtib võrdus $A' = L$, kus A on kõikide selles piirkonnas elavate abielus inimeste hulk ja L on kõikide selles piirkonnas (abielu) lahutanud inimeste hulk?

§6. HULKADE ÜHEND JA ERISOSA.

Eelnevates paragrahvides käsitlesime seda, mis on kahel hulgal ühist ja mis on see, mis eristab ühte hulka teisest. Neid asju väljendasid hulgateoreetilised operatsioonid *hulkade ühisosa moodustamine* ning *hulkade vahe moodustamine*. Järgnevalt tunneme huvi selle vastu, millised peaksid olema etteantud kahe hulga korral need hulgad, mille elemendid

1. võivad kuuluda “nii sinna kui tänna”
2. võivad kuuluda “kas sinna või tänna”.

Esimesel juhul tuleb meil moodustada kahe hulga ühendhulk ehk lühemalt öeldes ühend. Teisel juhul aga tuleb meil moodustada (kasutades raamatus [5] toodud termineid) *hulkade erisosa ehk neid hulkasid teineteisest eristav osa*.

Definitsioon 1. Hulkade X ning Y **ühendiks** nimetatakse kõikide selliste elementide hulka, mis võivad kuuluda hulka X või hulk Y . Hulkade X ning Y ühendit tähistatakse sümboliga $X \cup Y$.

Märkus. Nagu eespool paaril korral juba märgata võisime – ei ole ühe või teise hulga olemasolu küsimus sugugi triviaalne probleem. Sedalaadi olemasolu on võimalik kas tõestada või postuleerida. Ühendhulga korral olemasolu postuleeritakse.

Ühendhulga aksioom. Mistahes etteantud hulkade korral eksisteerib nende ühendhulk ehk niisugune hulk, mille elementideks on kõik niisugused elemendid, mis pärinevad ühest või teisest etteantud hulgast.

Näide 1. Ühendades kõikide mingis piirkonnas elavate meessoost inimeste hulga kõikide selles piirkonnas elavate naissoost inimeste hulgaga, saame kõikide selles piirkonnas elavate inimeste hulga.

Näide 2. Ühendades kõikide teravnurksete kolmnurkade hulga kõikide nürinurksete kolmnurkade hulgaga, saame kõikide *mittetäisnurksete* kolmnurkade hulga.

Näide 3. Ühendades kõikide paarisarvude hulga arvu 2 kõikide astmete hulgaga saame hulga $\{0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ (kuna $2^0 = 1$).

Märkus. Hulkade ühendamisel tuleb tähele panna, et ühiseid elemente ei loetaks nõ mitmel korral!

Näide 4. $\{O, \square, \diamond, \emptyset\} \cup \{\blacklozenge, \diamond, \Delta, \square, \nabla\} = \{O, \emptyset, \square, \diamond, \blacklozenge, \Delta, \nabla\}$.

Teoreem 1. Kui *lõplike* hulkade X ning Y elementide arvud on vastavalt $E(X)$ ja $E(Y)$, siis kehtib võrdus $E(X \cup Y) = E(X) + E(Y) - E(X \cap Y)$.

Tõestus. Tuleneb ühendi ja ühisosa määratlusest, silmas pidades ülalesitatud märkust selle kohta, et ühiseid elemente tuleb loetleda mitte üle ühe korra.

Näide 1. $E(\{O, \square, \diamond, \emptyset\} \cup \{\blacklozenge, \diamond, \bullet, \square, \nabla\}) = E(\{O, \emptyset, \square, \diamond, \blacklozenge, \bullet, \nabla\}) = 7$.

Samas $E(\{O, \square, \diamond, \emptyset\}) = 4$, $E(\{\blacklozenge, \diamond, \bullet, \square, \nabla\}) = 5$,
 $E(\{O, \square, \diamond, \emptyset\} \cap \{\blacklozenge, \diamond, \bullet, \square, \nabla\}) = E(\{\square, \diamond\}) = 2$ ning $4 + 5 - 2 = 7$.

Näide 2. Vaatleme hulkasid $\{m, n, p, q\}$ ja $\{x, y, z\}$.

$$E(\{m, n, p, q\} \cup \{x, y, z\}) = E(\{m, n, p, q, x, y, z\}) = \\ = E(\{x, y, z\}) + E(\{m, n, p, q\}) - E(\{m, n, p, q\} \cap \{x, y, z\}) = 4 + 3 - 0 = 7.$$

Eelnevalt vaatlesime, kuidas mõista sellist olukorda, et mingi hulk moodustatakse nõnda, et kahe eelnevalt teada oleva hulga puhul võime väita, et iga moodustatava hulga element kuulub “*sinna või tänna*”. Nüüd vaatleme olukorda, kus mingi hulk moodustatakse nõnda, et kahe eelnevalt teada oleva hulga puhul võime väita, et iga moodustatava hulga element kuulub “*kas sinna või tänna*”. Seejuures, nagu eespool juba mainisime, kasutame siinkohal raamatus [5] kasutusele võetud terminit *erisosa* ehk *eristav osa*.

Definitsioon 2. Hulkasid X ning Y *teineteisest eristavaks osaks* ehk lühemalt – *erisosaks* – nimetame sellist hulka, mille iga element kuulub kas hulka X või hulka Y , kuid ei kuulu korraga mõlemasse. Hulkade erisosa tähistatakse sümboliga $X\Delta Y$, võime kirjutada, et $X\Delta Y = \{ \beta \mid (\beta \in X \vee \beta \in Y) \ \& \ \neg(\beta \in X \ \& \ \beta \in Y) \}$.

Lähtudes asjakohastest definitsioonidest saab suurema vaevata tuletada järgmised järeldused.

Järeldus 1. $X\Delta Y = \{ \beta \mid (\beta \in X \vee \beta \in Y) \ \& \ \neg(\beta \in X \cap Y) \}$.

Järeldus 2. $X\Delta Y = \{ \beta \mid (\beta \in X \cup Y) \ \& \ (\beta \notin X \cap Y) \} = (X \cup Y) - (X \cap Y)$.

Küllap on võimalik ilma eriliste pingutusteta veenduda, et lõplike hulkade korral kehtib järgmine väide:

Teoreem 2. Kui lõplike hulkade X ning Y elementide arvud on vastavalt $E(X)$ ja $E(Y)$, siis kehtib võrdus $E(X\Delta Y) = E(X) + E(Y) - 2E(X \cap Y)$.

Näide 1. $\{O, \square, \diamond, \emptyset\} \Delta \{\blacklozenge, \diamond, \square, \bullet, \nabla\} = \{O, \emptyset, \blacklozenge, \bullet, \nabla\}$.

Leiame vastava elementide arvu:

$$E(\{O, \square, \diamond, \emptyset\} \Delta \{\blacklozenge, \diamond, \square, \bullet, \nabla\}) = E(\{O, \emptyset, \blacklozenge, \bullet, \nabla\}) = 5.$$

Samas näeme, et

$$E(\{O, \square, \diamond, \emptyset\}) = 4, \quad E(\{\blacklozenge, \diamond, \square, \bullet, \nabla\}) = 5,$$

$$E(\{O, \square, \diamond, \emptyset\} \cap \{\blacklozenge, \diamond, \square, \bullet, \nabla\}) = E(\{\square, \diamond\}) = 2 \quad \text{ning} \quad 4 + 5 - 2 \cdot 2 = 5.$$

Näide 2. $\{\otimes, \oplus, \Theta\} \Delta \{\otimes, \emptyset, \Theta\} = \{\oplus, \emptyset\}$.

Seejuures kehtivad järgmised võrdused:

$$E(\{\otimes, \oplus, \Theta\}) = 3, \quad E(\{\otimes, \emptyset, \Theta\}) = 3, \quad E(\{\otimes, \oplus, \Theta\} \cap \{\otimes, \emptyset, \Theta\}) = E(\{\otimes, \Theta\}) = 2,$$

mistõttu võime kirjutada, et

$$E(\{\otimes, \oplus, \Theta\} \Delta \{\otimes, \emptyset, \Theta\}) = 3 + 3 - 2 \cdot 2 = 2.$$

Enne käesoleva paragrahvi lõppu formuleerime veel ühe olulise väite:

Teoreem 3. Kui hulgad X ning Y ei oma ühiseid elemente, siis $X\Delta Y = X \cup Y$.

Tõestus. Tuleneb vahetult määratlustest ja ülalesitatud järeldusest 2.

Näide 1. Vaatleme hulkasid $\{m, n, p, q\}$ ja $\{x, y, z\}$.

$$\{m, n, p, q\} \Delta \{x, y, z\} = \{m, n, p, q, x, y, z\} = \{m, n, p, q\} \cup \{x, y, z\}.$$

Näide 2. Vaatleme mingi piirkonna kõikide elanike hulka K , selles piirkonnas elavate kõikide naissoost elanike hulka N ja kõikide kõnealuses piirkonnas elavate meessoost inimeste hulka M .

Ilmselt peame nõustuma, et viimatinimetatud kahte hulka eristavaks osaks $N \Delta M$ on antud juhul ühend $N \cup M$.

Samas võime veenduda ka selles, et antud juhul kehtivad võrdused

$$M \Delta K = N \quad \text{ning} \quad N \Delta M = N.$$

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Tavalises kõnepruugis on mõisted “*mis ühendab*” ning “*mis on ühist*” omavahel üsna samaväärsed. Kas sellisel juhul võime öelda, et tavaliselt kehtib võrdus $X \cup Y = X \cap Y$?
2. Esitage kõikide algarvude hulga ning kõikide kordarvude hulga ühend.
3. Kuidas võiksime nimetada mingis piirkonnas elavate kõikide tüdrukute hulga ja kõikide poiste hulga ühendit?
4. Täringu viskamisel võivad esile tulla arvud ühest kuueni. Vaatleme nende seas kõikide selliste arvude hulka K , mis on arvu 2 astmeteks ning kõikide selliste arvude hulka L , mis on arvu 3 astmeteks. Leiame hulga $K \cup L$ ning $L \Delta K$.
5. Osa ülikoolide õppejõududest töötavad mitmes ülikoolis korraga. Olgu kõikide selliste õppejõudude hulk, kes õpetavad Tehnikaülikoolis T ning olgu kõikide selliste õppejõudude hulk, kes õpetavad Pedagoogikaülikoolis P . Mida kujutavad endast hulgad $T \cup P$ ning $T \Delta P$?
6. Vaatleme kõikide võrdkülgsete kolmnurkade hulka K ning kõikide võrdnurksete kolmnurkade hulka N . Mida kujutavad endast hulgad $K \cup N$ ning $K \Delta N$?
7. Sõnastage tingimus, mida peavad täitma hulgad X ning Y selleks, et kehtiks võrdus $X \Delta Y = \emptyset$?

§7. KORTEEŽID.

Igapäevases elus puutume sageli kokku selliste olukordadega, kus sellest, et teame, mis elemendid vaadeldavas hulgas esinevad, ei piisa: vaja on teada ka nende elementide paiknemist üksteise suhtest. Täpsemalt seda, et milline element on esimene, milline teine, milline kolmas jne.

Eespool oli meil juttu hulkadest moodustatud paaridest. Samas võime veenduda, et mistahes hulka A ning B korral kehtib võrdus $\{A, B\} = \{B, A\}$. Teiste sõnadega – paaris ei ole elementide järjekord seni vaadeldud hulgateoreetiliste vahendite abil eristatav. Seega *vajame täiendavaid konstruktsioone selleks, et vähemalt kahest hulgast moodustada midagi sellist, mille raames saaksime selget tähendust omades kõnelda sellest, mis on **esimene** ja mis **teine**.*

Definitsioon 1. Hulkadest H ning K moodustatud *järjestatud paariks* nimetame hulka $\{\{H\}, \{H, K\}\}$. Hulka H nimetatakse siis *esimeseks elemendiks* ja hulka K nimetatakse vastavalt *teiseks elemendiks*. Hulkadest H ning K moodustatud järjestatud paari tähistatakse sümboliga $\langle H, K \rangle$.

Märkus. Kahtlemata on kahe elemendi järjestamiseks vajalik konstruktsioon keerulisevõitu. Kuid paraku pole matemaatikud aastatuhandete vältel selleks otstarbeks mitte midagi paremat suutnud välja mõelda. Niisiis lepime sellega, mis olemas.

Hulgateoorias on tõestatud, et kaks järjestatud paari saavad omavahel võrdsed olla vaid siis, kui vastavates positsioonides (st esimeses ja teises positsioonis) paiknevad võrdsed elemendid. Ehk lühemalt:

Teoreem 1. $\langle A, B \rangle = \langle X, Y \rangle$ siis ja ainult siis, kui $A = X$ ning $B = Y$.

Märkus. Meenutame, et “tavaliste” paaride $\{A, B\}$ ja $\{X, Y\}$ korral see nii ei ole!

Järgnevalt määratleme suvalise pikkusega lõplikud järjestatud kogumid.

Definitsioon 2. *Korteežideks* on

1. Kõik üksikud, kusjuures selliste korteežide *pikkuseks* on arv 1. Kui käsitleme hulgast H moodustatud üksikut $\{H\}$ korteežina, siis kasutame tähist $\langle H \rangle$.
2. Kui $\langle A, B, \dots, X \rangle$ on korteež, mille pikkus on arv n , siis *järjestatud paar* $\langle \langle A, B, \dots, X \rangle, Y \rangle$ on korteež, mille *pikkus* on arv $n + 1$. Seejuures tähistatakse antud korteeži sümboliga $\langle A, B, \dots, X, Y \rangle$ ja nimetatakse hulka A vaadeldava korteeži *esimeseks elemendiks*, hulka B *teiseks elemendiks*, ..., hulka X *n -ndaks elemendiks* ja hulka Y *$n + 1$ -ks elemendiks*.

Märkus. Mõisted *korteeži element* ning *korteeži m -is element* ei ole samaväärsed! Tõepoolest – korteeži $\langle A, B \rangle$ elementideks on määratluse kohaselt hulgad $\{A\}$ ning $\{A, B\}$, mitte hulgad A ning B ! Samas on A kõnealuse korteeži *esimene element* ja B *teine element*.

Teoreem 2. Erinevad korteežid võrduvad omavahel siis ja ainult siis, kui

1. neil on ühesugused pikkused
2. vastavates positsioonides paiknevad võrdsed elemendid.

Ehk lühemalt: $\langle A_1, \dots, A_\alpha \rangle = \langle X_1, \dots, X_\beta \rangle \Leftrightarrow (\alpha = \beta \& A_1 = X_1 \& \dots \& A_\alpha = X_\beta)$.

Definitsioon 3. Korteežide $\langle A_1, \dots, A_\alpha \rangle$ ning $\langle B_1, \dots, B_\beta \rangle$ *konkatenatsiooniks* nimetame korteeži $\langle A_1, \dots, A_\alpha, B_1, \dots, B_\beta \rangle$. Korteežide Φ ning Ψ konkatenatsiooni tähistame sümboliga $\Phi \odot \Psi$.

Kokkulepe. Kui käsitleme mingitest elementidest moodustatud hulka *tähestiku* ehk *alfabeedina*, siis nimetame niisugustest elementidest moodustatud korteeže *sõnadeks* ehk *väljenditeks*. Sõnadest moodustatud korteeže nimetatakse sellisel juhul sageli *lauseteks* ehk *tekstideks*.

Järeldus. Liitsõnade moodustamine on olemuselt korteežide konkatenatsiooni operatsioon. Teataval määral sama lugu on liitlausete moodustamise ja tekstide jätkamisega.

Teoreem 3. Korteežide konkatenatsiooni operatsioon *on* assotsiatiivne, kuid *ei ole* kommutatiivne!

Tõestus. Assotsiatiivsus tuleneb vahetult definitsioonist 3. Mittekommutatatiivsuse tõestamiseks piisab vähemalt ühest näitest: *tarkpea* $\neq$ *peatark*.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Kolmikute ja paaride korral võib täheldada, et $\{A, B, A\} = \{A, B\}$, kuigi samas $A \neq B$. Kas korteežide korral on samuti?
St kas võib täheldada, et $\langle A, B, A \rangle = \langle A, B \rangle$, kuigi samas $A \neq B$?
2. Milliseid tingimusi rahuldavate korteežide korral võiksime väita, et (nende) konkatenatsioon on kommutatiivne?
3. Mille poolest erineb konkatenatsiooni operatsioon ühendi moodustamise operatsioonist?
4. Kas $\odot$ operatsioon on olemuselt sama, mis Δ ?
5. Korteežide moodustamine tugineb definitsiooni põhjal eelnevalt olemasolevale korteežile ühe elemendi juurde panemisel. Kas sedalaadi tegevust saaks käsitleda konkatenatsiooni operatsioonina?
6. Oletame, et lisate vaadeldavasse tähestikku nn tühiku sümboli (tavaliselt on selleks "tühi koht", mida paigutatakse vajaduse korral mingi sümboli ette). Kas sellisel juhul oleks võimalik tekste määratlada ja käsitleda mitte korteežidest moodustatud korteežina, vaid nõ ühe korteežina, mis sobivates kohtades sisaldab tühikuid. Kui ei – siis miks? Kui jah – siis kuidas?

§8. CARTESIUSE KORRUTISED.

Mitmesugustes andmekogudes on üsna tüüpiline, et asjakohased kirjed on ühesuguse vormiga, mille juures sageli on oluline nende kirjete ühesugune pikkus. Seetõttu peame ka oma tähelepanu pöörama korteežidest moodustatud hulkade kirjeldamisele. Siin on keskseks mõisteks nn *hulkade ristkorrutis* ehk *Cartesiuse korrutis*.

Definitsioon 1. Hulkade A ning B *Cartesiuse korrutiseks* nimetatakse kõikide selliste järjestatud paaride hulka, milles esimene element on pärit hulgast A ning teine element on pärit hulgast B . Tähistades hulkade A ning B sümboliga $A \times B$, võime kirjutada, et $A \times B = \{ \langle \alpha, \beta \rangle \mid (\alpha \in A) \ \& \ (\beta \in B) \}$.

Näide 1. $\{ \heartsuit, \spadesuit \} \times \{ \square, \diamond, O \} = \{ \langle \heartsuit, \square \rangle, \langle \heartsuit, \diamond \rangle, \langle \heartsuit, O \rangle, \langle \spadesuit, \square \rangle, \langle \spadesuit, \diamond \rangle, \langle \spadesuit, O \rangle \}$.

Näide 2. $\{ O, A, E \} \times \{ I \} = \{ \langle O, I \rangle, \langle A, I \rangle, \langle E, I \rangle \}$.

Definitsioon 2. Hulkade $A, B, \dots, Y, Z$ Cartesiuse korrutiseks $A \times B \times \dots \times Y \times Z$ nimetatakse kõikide selliste korteežide hulka, mille esimene element pärineb hulgast A , teine element pärineb hulgast B ,, eelviimane element pärineb hulgast Y ning viimane – hulgast Z .

Järeldus. $A \times B \times \dots \times Y \times Z = (A \times B \times \dots \times Y) \times Z$.

Tõestus. Järeldub vahetult äsjaesitatud definitsioonist ning korteežide definitsioonist.

Näide 1. Kellaaja esitamiseks minuti täpsusega võib kasutada järgmist Cartesiuse korrutist:

$\{ 00, 01, 02, \dots, 09, 10, 11, 12, \dots, 19, 20, 21, 22, \dots, 24 \} \times \{ : \} \times \{ 00, 01, 02, \dots, 59 \}$.

Näide 2. Mingis linnas paiknevate majade asukohta saab kirjeldada järgmise Cartesiuse korrutise abil: *Antud linna kõikide tänavate nimede hulk* $\times$ *numbrite hulk*.

Definitsioon 3. Mistahes hulka nimetatakse iseenda *esimeseks Cartesiuse astmeks*. Ühest ja samast hulgast moodustatud Cartesiuse korrutist nimetatakse selle hulga *Cartesiuse astmeks*. Cartesiuse astmete tähistamiseks kasutame järgmit kirjaviisi: $A^{(1)} = A$, $A^{(n+1)} = A^{(n)} \times A$.

Näide. Kahe loogilise lause kõikide võimalike tõeväärtuste komplekt kujutab endast tõeväärtuste hulga $\{0, 1\}$ Cartesiuse ruutu. Kolme loogilise lause kõikide võimalike tõeväärtuste komplekt kujutab endast tõeväärtuste hulga $\{0, 1\}$ Cartesiuse kuupi: $\{ \langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \}$.

Hulgateoorias on tõestatud järgmine tulemus, mis võimaldab lõplike hulkade korral kindlaks teha, kuipalju elemente sisaldab nende hulkade Cartesiuse korrutis:

Teoreem 1. Lõplike hulkade korral, kui $E(A) = a$, $E(B) = b$, ... , $E(Y) = y$, $E(Z) = z$, siis $E(A \times B \times \dots \times Y \times Z) = a \cdot b \cdot \dots \cdot y \cdot z$.

Näide 1. Minuti täpsusega kellaaja esitamiseks sobiv hulk sisaldab $25 \cdot 1 \cdot 60 = 1500$ elementi.

Näide 2. Tavalises kaardimängus loetakse mingi masti piltideks vastava masti *sõdurit, emandat, kuningat ja ässa*. Mastideks on *risti, ruutu, ärtu ja poti*. Seega võime öelda, et tavalise kaardimängu kõikide piltide hulk kujutab endast järgmist Cartesiuse korrutist $\{\text{risti, ruutu, ärtu, poti}\} \times \{\text{soldat, emand, kuningas, äss}\}$, milles on järelikult $4 \cdot 4 = 16$ elementi.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Kirjeldage USAs kasutusel olevat kalendriaja märkimise viisi sobivate hulkade Cartesiuse korrutise abil.
2. Kirjeldage kellaaja esitamise viisi nõ *mitte 24 tunni süsteemis* sobivate hulkade Cartesiuse korrutise abil.
3. Kirjeldage isikunimede esitamise viise sobivate hulkade Cartesiuse korrutiste abil ja selgitage, mille poolest need korrutised erinevad Eestis kasutatavate ja Venemaal kasutatavate isikunimede esitamise puhul.
4. Milline Cartesiuse korrutis sobiks geograafilistel kaartidel asukohtade esitamiseks?
5. Kas Cartesiuse korrutis on assotsiatiivne nagu seda näiteks on arvude korrutis?
6. Millise Cartesiuse korrutise abil oleks võimalik kirjeldada kontserdisaalis paiknevaid istekohti?
7. Palju elemente on tühja hulga Cartesiuse ruudus?
8. Kirjeldage malemängus mänguväljade esitust sobivate hulkade Cartesiuse korrutise abil.

§9. SEOSED JA VASTAVUSED.

Mitmesuguste seoste leidmine mingite hulkade elementide vahel selgelt käsitletav Cartesiuse korrutiste ning osahulkade abil. Seejuures eeldame, et mingite *elementide seotus* on olemuselt samaväärne kõnealustest *konkreetsetest elementidest moodustatud korteeži kuulumisega vaadeldavasse seosesse*.

Näide 1. Arvutile, milles on salvestatud andmed mingi piirkonna elanike kohta, on tõenäoliselt raske selgitada vanemaks ja lapseks olemise seose olemust. Samas on võimalik moodustada kõikide *selliste* järjestatud paaride hulk, mille korral antud paaris figureeriv esimene elanik on samas paaris figureeriva teise elaniku vanemaks ning teine elanik on samal ajal esimese lapseks. Seega näeme, et vaadeldaval juhul on *vanemaks-lapseks olemise seose* näol tegemist kõnealuse piirkonna kõikide elanike hulga Cartesiuse ruudu teatava osahulgaga.

Näide 2. Mingis korralikus ja vanamoelistel alustel loodud suhetega patriarhaalses kogukonnas kujutab abieluseos endast sisuliselt kõikide selliste järjestatud paaride hulka, mille esimene elemendina figureerib mees ja teise elemendina figureerib selle mehe naine. Niisiis – kui tähistame kõnealuse kogukonna kõikide meesliikmete hulga sümboliga M ning naisliikmete hulga sümboliga N , siis näeme, et vaadeldaval juhul on abieluseoseks üks hulk $\clubsuit$, mille korral võime väita, et $\clubsuit \subseteq M \times N$.

Definitsioon 1. Hulkade $H_1, H_2, \dots, H_k$ elementide vaheliseks *k-kohaliseks seoseks* nimetame suvalist hulka R , mille korral on teada, et $R \subseteq H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$.

Märkus 1. Seoseid nimetatakse veel terminitega *relatsioon* ning *predikaat*.

Märkus 2. Põhimõtteliselt vaadeldakse ka *ühekohalisi* ehk *unaarseid seoseid*. Samuti nimetatakse tihtilugu eraldi *kahekohalisi* ehk *binaarseid seoseid*, harvemini aga *kolmekohalisi* ehk *ternaarseid seoseid*.

Näide 1. *Algarvuks olemine, paarisarvuks olemine, täisruuduks olemine* jms on kõikide naturaalarvude hulgal defineeritud unaarseteks seosteks.

Näide 2. *Ristseis, paralleelsus, lõikumine* jms on kõikide sirgete hulgal defineeritud binaarseteks seosteks.

Näide 3. *Jagamine* (mis seob omavahel jagatavat, jagajat ning jagatist), on ternaarne seos arvude hulgal.

Näide 4. *Meetrika* on kolmekohaline seos, mis seob mingis hulgas kahte elementi nendevahelist kaugust väljendava arvuga.

Teoreem 1. Kui tegemist on lõplike hulkadega $A, B, \dots, Y, Z$, mille korral $E(A) = a, E(B) = b, \dots, E(Y) = y, E(Z) = z$, siis nende hulkade elementide vaheliste kõikmõeldavate seoste hulgas on $2^{a \cdot b \cdot \dots \cdot y \cdot z}$ erinevat seost.

Tõestus. Määratluse kohaselt on iga seos hulkade $A, B, \dots, Y, Z$ elementide vahel mingi osahulk hulgas $A \times B \times \dots \times Y \times Z$. Selle hulga kõikide osahulkade arv on (vt §2. Teoreem 5.) võrdne arvuga $2^{E(A \times B \times \dots \times Y \times Z)} = 2^{a \cdot b \cdot \dots \cdot y \cdot z}$.

Näide 1. Kahe mehe ja kolme naise vahel võib olla $2^{2 \cdot 3} = 64$ erinevat binaarset seost!

Näide 2. Täringu tahkudel olevate arvude vahel võib esineda $2^{6 \cdot 6 \cdot 6} = 2^{216} =$ (see on väga-väga suur arv) ternaarset seost.

Märkus. Teoreemist 1. lähtuvalt peaksime üliettevaatlikud olema sedalaadi ülesandepüstituste, päringute vms formuleerimisega, milles soovime täielikku ülevaadet mingite (isegi üsna väikesearvuliste) hulkade elementide vahelistest seostest.

Järgnevalt (antud paragrahvi raames) vaatleme vaid binaarseid seoseid.

Definitsioon 2. Binaarset seost S nimetame **üks-üheseks vastavuseks** hulkade X ning Y elementide vahel, kui see koosneb kõikidest sellistest järjestatud paaridest, mille esimesteks elementideks on **kõik** hulga X elemendid, teisteks elementideks aga **kõik** hulga Y elemendid, kusjuures iga hulga X element on paaris vaid täpselt ühe hulga Y kuuluva elemendiga ja vastupidi – iga hulga Y element on paaris vaid täpselt ühe hulga X kuuluva elemendiga. Kui hulga X ja Y elementide vahel on üks-ühene vastavus, siis kirjutame $X \leftrightarrow Y$.

Näide 1. Seos $\{ \langle u, w \rangle \mid u \in \mathbb{N} \text{ ja } w \in \mathbb{P} \text{ ja } 2u = w \}$ on üks-ühene vastavus kõikide naturaalarvude hulga $\mathbb{N}$ ja kõikide paarisarvude hulga $\mathbb{P}$ elementide vahel.

Näide 2. Seos $\{ \langle u, w \rangle \mid u \in \mathbb{P} \text{ ja } w \in \mathbb{U} \text{ ja } u = w - 1 \}$ on üks-ühene vastavus kõikide paarisarvude hulga $\mathbb{P}$ ja kõikide paaritute arvude hulga $\mathbb{U}$ elementide vahel.

Teoreem 2. Üks-ühese vastavuse seos on

1. Refleksiivne (st et mistahes hulga X korral $X \leftrightarrow X$)
2. Transitiivne (st et mistahes hulkade X, Y ning Z korral, kui $X \leftrightarrow Y$ ja $Y \leftrightarrow Z$, siis $X \leftrightarrow Z$)
3. Sümmeetiline (st et mistahes hulkade X ja Y korral, kui $X \leftrightarrow Y$, siis $Y \leftrightarrow X$)

Tõestus. Tuleneb otseselt definitsioonist.

Definitsioon 3. Binaarset seost S nimetame **üheseks vastavuseks** hulkade X ning Y elementide vahel, kui see koosneb kõikidest sellistest järjestatud paaridest, mille esimesteks elementideks on **kõik** hulga X elemendid, teisteks elementideks aga **kõik** hulga Y elemendid, kusjuures iga hulga X element on paaris vaid täpselt ühe hulga Y kuuluva elemendiga. Kui hulga X ja Y elementide vahel on üks-ühene vastavus, siis kirjutame $X \rightarrow Y$.

Näide 1. Kõikide naturaalarvude hulga $\mathbb{N}$ ja loogiliste lausete tõeväärtuste hulga $B = \{0, 1\}$ elementide vahel on ühene vastavus, milleks on näiteks järgmine seos: $\{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{N} \text{ ja } y \in B \text{ ja } y = [(-1)^x + 1] / 2 \}$.

Näide 2. Tasandi kõikide punktide hulk on üheses vastavuses sellel tasandil paikneva (suvalise) sirge kõikide punktide hulgaga. Vastava seose saame, kui vaatleme järjestatud paaride raames esimese elemendina tasandi punkti ja teise elemendina kõnealuse punkti projektsiooni antud sirgele.

Teoreem 3. Ühese vastavuse seos on

1. Refleksiivne (st et mistahes hulga X korral $X \rightarrow X$)
2. Transitiivne (st et mistahes hulkade X , Y ning Z korral, kui $X \rightarrow Y$ ja $Y \rightarrow Z$, siis $X \rightarrow Z$).

Tõestus. Tuleneb vahetult definitsioonist.

Märkus. Seda, et ühese vastavuse seos pole sümmeetriline kinnitab eeltoodud näide kõikide naturaalarvude hulga N ning tõeväärtuste hulga B ühesest vastavusest.

Teoreem 4. Iga üks-ühese vastavuse seos on ühtlasi ühese vastavuse seoseks.

Tõestus. Ühese vastavuse seose määratluses ei nõuta, et teise hulga igale elemendile vastaks täpselt üks element esimesest hulgast. Muus osas määratlused kattuvad. Seega on üks-ühese vastavuse näol tegemist ühese vastavuse erijuhtumiga.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Vaatleme Eesti Vabariigi seadustega kooskõlas olevat abieluseost S inimeste vahel ning olgu M kõikide selliste kodanike hulk, kes on abielumehed ja N kõikide selliste kodanike hulk, kes on abielunaised. Kas antud juhul võime väita, et seos S on ühene seos hulkade M ja N elementide vahel?
2. Olgu M ning N eelmises ülesandes määratletud hulgad ja tähistagu $\heartsuit$ inimeste vahelise armastuse seost. Kas seos $\heartsuit$ on üks-ühese vastavuse seoseks hulkade M ja N elementide vahel?
3. Kas kahe erineva pikkusega lõigu punktide vahel saab eksisteerida üks-ühene vastavus? (Soovitus: moodustage vaadeldavatest lõikudest riskülik ja kasutage selle diagonaali).
4. Kas ühiklõigu ning arvtelje punktide vahel saab eksisteerida üks-ühene vastavus? (Soovitus: paigutage lõik ja arvtelg teineteise suhtes risti ja proovige kasutada mõnda sobiva tangensfunktsiooni graafikut).
5. Tähistagu kõikide inimeste hulgal V “vanemaks-lapseks” olemise seost ning L “lapseks-vanemaks” olemise seost. Kumb seos on inimeste hulgal ühese vastavuse seoseks? Kas mõlemad? Kas mitte kumbki?
6. Kas aastal 2003 kehtivate seadustega kooskõlas on kõikide legaalse töötajate hulga T ja kõikide legaalse tööandjate hulga elementide vahel üks-ühene või ühene vastavus?

§10. MÕNED OLULISEMAD BINAARSETE SEOSTE LIIGID.

Käesolevas paragrahvis vaatleme seoseid, mille abil on võimalik tuvastada mingi hulga elementide vahel teatavat samaväärsust ning seoseid, mille abil on võimalik tuvastada mingi hulga elementide vahel teatavat järjestatust.

Definitsioon 1. Hulga H elementide vahelist seost Q nimetame *ekvivalentsuse seoseks*, kui

1. seos Q on hulgal H **refleksiivne** (st et iga $x \in H$ korral xQx)
2. seos Q on hulgal H **transitiivne** (st et iga $x, y, z \in H$ korral, kui xQy ning yQz , siis xQz)
3. seos S on hulgal H **sümmeetriline** (st et iga $x, y \in H$ korral, kui xQy , siis yQx).

Järeldus. Iga üks-ühese vastavuse seos on ekvivalentsuse seoseks.

Näide 1. Nö geneetilise suguluse seos inimeste vahel on ekvivalentsuse seoseks.

Näide 2. Paralleelsuse seos sirgete hulgal on ekvivalentsuse seos.

Näide 3. Ristseisu seos sirgete hulgal ei ole ekvivalentsuse seoseks, kuna see seos pole üldiselt transitiivne.

Märkus. Hulgateoorias näidatakse, et ekvivalentsusseose abil saab hulga elemendid jagada nn *ekvivalentsiklassidesse*, millesse kuuluvad kõik omavahel ekvivalentsed elemendid seejuures tõestatakse, et mistahes ekvivalentsiklassid kas ühtivad või ei sisalda mitte ühegi ühist elementi (vt näit [6]).

Definitsioon 2. Binaarset seost S mis on defineeritud mingi hulga H elementide vahel, nimetame *osalise järjestuse seoseks* hulga H elementide vahel, kui

1. seos S on hulgal H **refleksiivne** (st et iga $x \in H$ korral xSx)
2. seos S on hulgal H **transitiivne** (st et iga $x, y, z \in H$ korral, kui xSy ning ySz , siis xSz)
3. seos S on hulgal H **antisümmeetriline** (st et iga $x, y \in H$ korral, kui xSy ning ySx , siis $x=y$)

Näide 1. “Väiksem või võrdne” seos naturaalarvude vahel on osalise järjestuse seos kõikide naturaalarvude hulgal.

Näide 2. Inimeste vaheline “eellaseks-järglaseks” olemise seos ei ole osalise järjestuse seos kõikide inimeste vahel, kuna see pole refleksiivne (kes saaks olla iseenda esivanemaks?).

Näide 3. Osahulgaks olemise seos $\subseteq$ on osalise järjestuse seoseks.

Definitsioon 3. Hulga H elementide vahelist seost R nimetame *lineaarse järjestuse seoseks*, kui

1. seos R on hulgal H refleksiivne (st et iga $x \in H$ korral xRx)
2. seos R on hulgal H transitiivne (st et iga $x, y, z \in H$ korral, kui xRy ning yRz , siis xRz)
3. seos R on hulgal H antisümmeetriline (st et iga $x, y \in H$ korral, kui xRy ning yRx , siis $x=y$)
4. seos R on hulgal H kvaasitotaalne (st et iga $x, y \in H$ korral, kas xRy või yRx , või $x=y$)

Näide 1. “Väiksem-võrdne” seos naturaalarvude vahel on lineaarse järjestuse seoseks.

Näide 2. “Teine ei ole eellaseks esimesele” seos inimeste vahel on lineaarse järjestuse seoseks mingi sugupuu nõ *ühe liini piires* (tõepoolest – keegi pole iseenda eellaseks, mis annab refleksiivsuse; kui ühe ja sama liini peal y pole x eellaseks ja z pole omakorda y eellaseks, siis ei saa ka z olla x eellaseks, millest tuleneb transitiivsus; kui ühe liini peal y pole x eellaseks ja samas ka x pole y eellaseks, siis pole muud võimalust, kui $x=y$ – st antisümmeetriat; ühe liini peal saab mistahes x ja y korral otsustada kas tegu on eellaseks-järglaseks olemisega või ühe ja sama inimesega, mis väljendab vaadeldava seose kvaasitotaalsust).

Märkus. Lineaarse järjestuse “sissetoomisega” saab hulga elemendid sättida nõ ühte ritta ehk ühele joonele.

Definitsioon 4. Lineaarse järjestuse seost T mingi hulga H elementide vahel nimetatakse *täieliku järjestuse seoseks*, kui hulga H igal mittetühjal osal leidub seose T alusel oma esimene element (ehk selline element, pärast mida paiknevad seose T mõttes kõik vaadeldava osahulga elemendid).

Näide 1. Naturaalarvude vaheline “väiksem või võrdne” seos on täieliku järjestuse seoseks kõikide naturaalarvude hulgal.

Näide 2. Vaatleme kõikide täisarvude hulka $\{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$ ja vaatleme sellel hulgal seost “väiksem või võrdne”. Antud juhul pole tegemist täieliku järjestuse seosega, kuna näiteks kõikidest negatiivsetest täisarvudest koosnev osahulk ei oma selle seose mõttes esimest elementi.

Näide 3. Vaatleme Aadama kõikide järglaste hulka, kelle vahel olgu määratletud seos “pole sündinud varem”. Ilmselt on tegemist täieliku järjestuse seosega, kuna igal Aadama järglasel on oma sünniaeg ja neid saab arvteljel alati omavahel võrrelda.

Märkus. Kui hulgateoorias tunnustatakse nn valikuaktsiooni kehtivust (vt näit [1]), siis on võimalik tõestada, et iga hulga jaoks leidub seos, mis just selle hulga elemendid täielikult ära järjestab.

KÜSIMUSED JA ÜLESANDED ISESEISVAKS TÖÖKS.

1. Mille poolest on ekvivalentsuse seosed sarnased osalise järjestuse seostega ja mille poolest nad erinevad?

2. Kas võrduse seos saab olla lineaarse järjestuse seoseks? Miks?
3. Kas elemendiks olemise seos saab olla osalise järjestuse seoseks? Miks?
4. Miks ei saa osahulgaks olemise seos olla ekvivalentsuse seoseks?
5. Kas on mõeldav sellise täieliku järjestuse seose olemasolu, mis samal ajal pole lineaarse järjestuse seoseks?
6. Vaatleme kõikide inimeste hulka ja selle elementide vahel defineeritud nn geneetilise suguluse seost. Mida kujutavad endast selle seose alusel moodustatud ekvivalentsiklassid?
7. Vaatleme jälle kõikide inimeste hulka ning binaarset seost "*hoiavad raha ühes ja samas pangas*". Kas antud seose korral on tegemist ekvivalentsusseosega? Miks?
8. Vaatleme mingi piirkonna elanike registrit, milles on ära toodud inimeste laste arvud. Määratleme nüüd binaarse inimestevahelise seose "*... pole ... võrreldes rohkem lapsi*". Kas antud seose näol on tegemist ekvivalentsusseosega või hoopis täieliku järjestuse seosega?

KOKKUVÕTE.

Eespool vaadeldud materjal oli mõeldud selleks, et *värskendada* oma teadmisi hulgateooria teatavate alusmõistete ja tulemuste osas enne asumist mõne IT alaga (näiteks andmebaaside teooria) seotud õppeaine juurde. Seetõttu ei tohiks antud õppevahendit käsitleda hulgateooria õpikuna ning uskuda, et pärast sellega tutvumist ongi hulkade kohta kõik oluline teada saadud ja selgeks tehtud (vt ja võrdle näiteks [7] ja [8]).

Õnneks on ka Eesti keeles piisavalt mitmesuguse mahu ja põhjalikkuse astmega õppekirjandust, mida igal juhul tasuks nüüd, veidi värskendatud teadmiste abil edasi uurida. Selles osas võib lugejale abiks olla käesoleva õppevahendi lõpus paiknev kirjanduse loend.

KASUTATUD KIRJANDUS.

1. Kuratowski K., Mostowski A. 1967. Set theory. North-Holland Publishing Company. Amsterdam.
2. Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y. 1958. Foundations of Set theory. North-Holland Publishing Company. Amsterdam.
3. Kilp M., Nummert U. 1994. Hulgateooria elemendid. Tartu Ülikooli Kirjastus. Tartu.
4. Hall M. Jr., 1967. Combinatorial theory. Blaisdell Publishing Company. Waltham (Massachusetts). Toronto. London.
5. Lorents P., 2002. Hulgad, valemid, algoritmid. EBS Print. Tallinn.
6. Lorents P. 2001. Informaatika teoreetilised alused. EBS Print. Tallinn.
7. Oja P. 1995. Hulgateooria. Tartu Ülikooli Kirjastus. Tartu.
8. Monakov-Rogozkin A., Normak P., Levin A. 1986. Hulgateooria ja loogika elemente. Ed. Vilde nim Tallinna Pedagoogiline Instituut. Tallinn.