

Diskreetne matemaatika ja graafid – kordamine

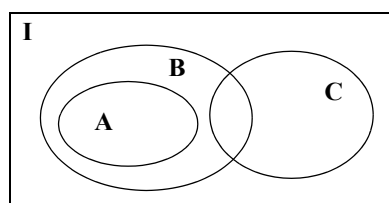
1. Hulgad (Sets)

- *hulk* on *elementide* (objektide) kogum [Georg Cantor, 1845-1918]
- hulk – *set*, element – *element*, *member*
- $x \in A$ – element x kuulub hulka A
- $|A|$, $N(A)$ – hulga võimsus (kardinaalsus / cardinality)
- lõplikud (finite) ja lõpmatud (infinite) hulgad / loenduvad (countable) hulgad
- $P \subseteq Q$ – alamhulk (subset) – hulk P on on hulga Q alamhulk kui iga hulga P element on ka hulga Q element
- ühisosata (disjunktset) hulgad (disjoint sets)
- tühihulk (empty set) – $\emptyset$, universaalhulk (universal set) – I
- 2^A , $P(A)$ – astmehulk (potentshulk / power set) – hulga A kõigi alamhulkade hulk

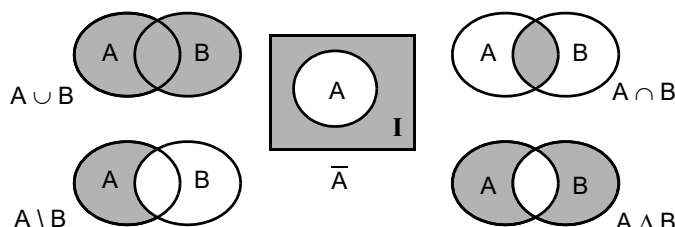
Tehted hulkadega

- $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \ \& \ b \in B \}$ – otsekorrutis (Descartes'i korrutis, Cartesian product)
- (a_1, a_2) , $\langle a_1, a_2 \rangle$ – järjestatud paar (ordered pair, ordered 2-tuple)
- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ – hulkade ühend (union)
- $A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \& \ x \in B \}$ – hulkade ühisosa (lõige, intersection)
- $\bar{A} = \{ x \mid x \in I \ \& \ x \notin A \}$ – hulga täiend (complement, A^C)
- $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \ \& \ x \notin B \}$ – hulkade vahe (difference, relative complement), ($\bar{A} = I \setminus A$)
- $A \Delta B = \{ x \mid (x \in A \ \& \ x \notin B) \vee (x \notin A \ \& \ x \in B) \}$ – hulkade sümmeetriline vahe

Venn'i diagramm [John Venn, 1834-1923]



$$A \subseteq B \quad A \cap C = \emptyset \quad B \cap C \neq \emptyset$$



Operatsioonide omadused

- Kommutatiivsus (vahetuvus, commutativity) $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
- Assotsiatiivsus (ühenduvus, associativity) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributiivsus (jaotuvus, distributivity) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- De Morgani seadused $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- Idempotentsusseadus (idempotency) $A \cap A = A$ $A \cup A = A$
- Välistatud kolmanda seadused $A \cup \bar{A} = I$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- Topelttäiendi seadus $\overline{\bar{A}} = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap I = A$ $A \cup \emptyset = A$ $A \cup I = I$

- Neeldumisseadused

$$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B \quad A \cap (A \cup B) = A \quad A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

- Kleepimisseadused $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \quad (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Vastavused (Functions, Relations)

Antud 2 hulka A ja B ning reegel, kuidas hulka A elemendid on vastavuses φ hulga B elementidega – $\varphi \subseteq A \times B \quad \varphi : A \rightarrow B$

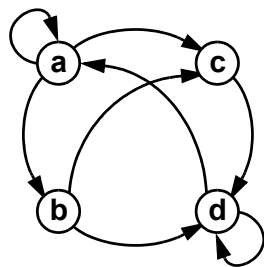
Binaarsuhted (Binary Relations)

- Vastavuse φ erijuhtu, kus lähte- ja siindhulk langevad kokku – $D(\varphi) = R(\varphi) = A$

- Tähistus – $R \subseteq A \times A$

- Mugav interpreteerida suunatud graafina – hulga A elemendid vastavad tippudele, seosed elementide vahel vastavad kaartele

- Binaarmaatriks (naabrusmaatriks)



	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	0	1	1
c	0	0	0	1
d	1	0	0	1

Binaarsuhete R omadused

- Refleksiivsus (α_1) – ($\forall a \in A [\langle a, a \rangle \in R]$)

- Antirefleksiivsus (α_2) – ($\forall a \in A [\langle a, a \rangle \notin R]$)

- Suhe, mis ei täida nõudeid α_1 ega α_2 , on mitterefleksiivne

- Sümmeetria (α_3) – ($\forall a, b \in A [\langle a, b \rangle \in R \rightarrow \langle b, a \rangle \in R]$), kus $a \neq b$

- Antisümmeetria (α_4) – ($\forall a, b \in A [\langle a, b \rangle \in R \rightarrow \langle b, a \rangle \notin R]$), kus $a \neq b$

- Suhe, mis ei täida nõudeid α_3 ega α_4 , on mittesümmeetiline

- Transitiivsus (α_5) – ($\forall a, b, c \in A [(\langle a, b \rangle \in R \ \& \ \langle b, c \rangle \in R) \rightarrow \langle a, c \rangle \in R]$), kus $a \neq b, b \neq c, a \neq c$

- Antitransitiivsus (α_6) – ($\forall a, b, c \in A [(\langle a, b \rangle \in R \ \& \ \langle b, c \rangle \in R) \rightarrow \langle a, c \rangle \notin R]$), kus $a \neq b, b \neq c, a \neq c$

- Suhe, mis ei täida nõudeid α_5 ega α_6 , on mittetransitiivne

Näitegraaf

ei

ei

jah

ei

jah

-

ei

ei

jah

2. Boole'i algebra

- Signatuur koosneb 2 binaarsest ja ühest unaarsest operatsioonist $(+, \cdot, \bar{})$

- $+$ ja $\cdot$ on kommutatiivsed, assotsiatiivsed, idempotentsed ja teineteise suhtes distributiivsed

- Eksisteerivad elemendid 0 ja 1 nii, et $x \cdot \bar{x} = 0$ ning $x + \bar{x} = 1$

- **Näited:** $\{2^A, \cap, \cup, \bar{}\}$ – Cantori algebra / $\{(0,1)^n, \&, \vee, \bar{}\}$ – loogikaalgebra
- Kaks algebrat on isomorfised ($A_1 = \langle M_1, S_1 \rangle \equiv A_2 = \langle M_2, S_2 \rangle$), kui eksisteerib üksühene vastavus φ nii, et $\varphi: (M_1 \cup S_1) \Leftrightarrow (M_2 \cup S_2)$, kus $f_i(m_{j1}, \dots, m_{jk-1}) = m_{jk} \Leftrightarrow j(f_i)(j(m_{j1}), \dots, j(m_{jk-1})) = j(m_{jk})$, $m_{j1} \in M_1, j(m_{j1}) \in M_2, f_i \in S_1, j(f_i) \in S_2$
- Cantori algebra ja loogikaalgebra on isomorfised

Loogikafunktsioonid

- $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kus nii argumendid kui funktsiooni väärtus kuuluvad hulka $\{0,1\}$
- Iga loogikafunktsiooni võib esitada tõeväärtustabelina
- Erinevate loogikafunktsioonide $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ arv K on 2^{2^n}
- $n=1 \rightarrow K=4$; $n=2 \rightarrow K=16$; $n=3 \rightarrow K=256$; $n=4 \rightarrow K=65536$; $n=5 \rightarrow K=4,3 \cdot 10^9$

Kõikvõimalikud kahe muutuja funktsioonid $f(x_1, x_2)$

a	b	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_0 – konstant 0

f_2 – implikatsiooni eitus $\overline{a \rightarrow b}$

f_4 – pöördimplikatsiooni eitus $\overline{b \rightarrow a}$

f_6 – summa mooduliga 2, $a \oplus b$

f_8 – Pierce'i funktsioon, $\overline{a \vee b}$ ehk $a \downarrow b$

f_{10} – argumendi inversioon $\bar{b}$

f_{12} – argumendi inversioon $\bar{a}$

f_{14} – Shefferi funktsioon, $\overline{a \& b}$ ehk $a \downarrow b$

f_1 – konjunktsioon, $a \& b$ ehk $a \cdot b$ ehk ab

f_3 – argumendi a väärtus

f_5 – argumendi b väärtus

f_7 – disjunktsioon, $a \vee b$ ehk $a + b$

f_9 – samaväärsusfunktsioon, $a \leftrightarrow b$

f_{11} – pöördimplikatsioon $b \rightarrow a$

f_{13} – implikatsioon $a \rightarrow b$

f_{15} – konstant 1

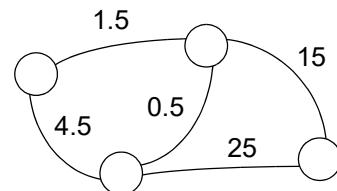
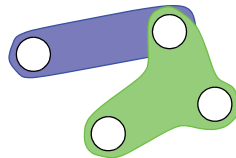
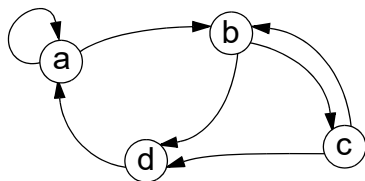
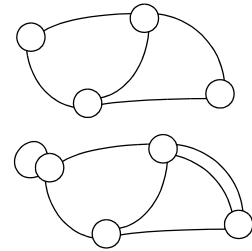
- Üldlevinud prioriteedid – $\bar{}, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Loogika põhiseadused

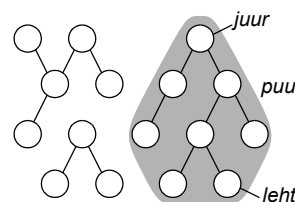
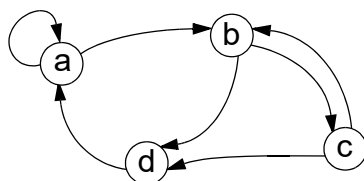
- Idempotentsus – $a \& a = a$ $a + a = a$
- Kommutatiivsus – $a \& b = b \& a$ $a + b = b + a$
- Assotsiatiivsus – $(a \& b) \& c = a \& (b \& c)$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Distributiivsus – $a \& (b + c) = (a \& b) + (a \& c)$ $a + (b \& c) = (a + b) \& (a + c)$
- Topelteilus – $\overline{\overline{a}} = a$
- De Morgan – $\overline{a \& b} = \bar{a} + \bar{b}$ $\overline{a + b} = \bar{a} \& \bar{b}$
- Kleepimine – $(a \& b) + (a \& \bar{b}) = a$ $(a + b) \& (a + \bar{b}) = a$
- Neeldumine – $a + (a \& b) = a$ $a \& (a + b) = a$ $a + (\bar{a} \& b) = a + b$ $a \& (\bar{a} + b) = a \& b$
- Konstandid – $a + \bar{a} = 1$ $a \& \bar{a} = 0$ $a \& 0 = 0$ $a + 0 = a$ $a \& 1 = a$ $a + 1 = 1$
- Lisateisendusi – $a \rightarrow b = \bar{a} + b$ $a \oplus b = (a \& \bar{b}) + (\bar{a} \& b)$ $a \leftrightarrow b = (a \& b) + (\bar{a} \& \bar{b})$

3. Graafid (Graphs)

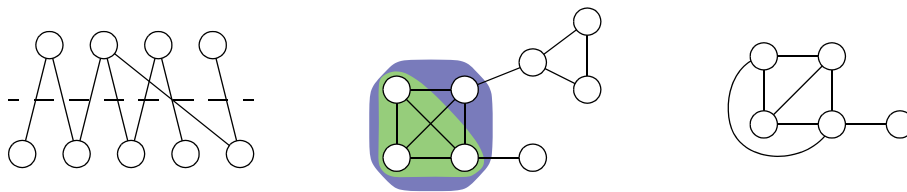
- Leonhard Euler (1707-1783), praktiline kasutus alles 1930. alates.
- *Graaf* (graph) – $G=(V,E)$
 $v_i \in V$ – sõlmede hulk [node, vertex (pl. vertices)]
 $e_n = \langle v_i, v_j \rangle \in E$ – servade/kaarte hulk [edge]
- *Silmus* (loop) – serv sõlmest iseendale
- *Multigraaf* (multigraph) – rohkem kui üks serv kahe sõlme vahel (mitmikserv / multiple edge)
- *Lihtne graaf* (simple graph) – puuduvad nii silmused kui ka mitmikservad
- *Orienteerimata graaf* (undirected graph) – sümmeetriline
- *Orienteeritud graaf* (suunatud graaf, directed graph) – antisümmeetriline (servad)
- *Sõlme aste* (degree) – sõlmega seotud kaarte arv
- *Hüpergraaf* (hypergraph) – iga servaga võib olla seotud rohkem kui kaks sõlme
- *Kaalutatud graaf* (weighted graph, network) – reaalarv seostatud servaga (sõlmega)



- *Käik* (walk) - sõlmede ja servade jada – (a, $\langle a,a \rangle$, a, $\langle a,b \rangle$, b, $\langle b,c \rangle$, c, $\langle c,b \rangle$, b, $\langle b,c \rangle$, c)
- *Rada* (trail) - käik erinevate servadega – (a, $\langle a,a \rangle$, a, $\langle a,b \rangle$, b, $\langle b,c \rangle$, c)
- *Tee* (path) - rada erinevate sõlmedega – (a, $\langle a,b \rangle$, b, $\langle b,c \rangle$, c, $\langle c,d \rangle$, d)
- *Tsükel* (cycle) - suletud käik erinevate sõlmedega – (a, $\langle a,b \rangle$, b, $\langle b,d \rangle$, d, $\langle d,a \rangle$)
- *Sidus graaf* (connected graph) - $\forall v_i, v_j \in N \exists \text{path}(v_i, v_j)$,
- *Mets* (forest) / atsükliline graaf (acyclic graph) – graaf ilma tsükliteta
- *Puu* (tree) – sidus atsükliline graaf – juur (root) & leht (leaf/leaves)

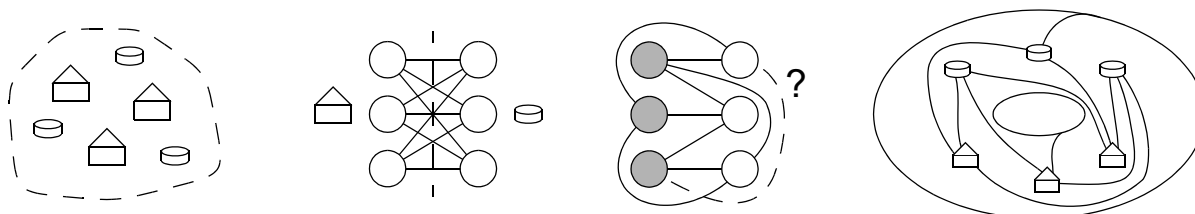


- *Täielik graaf* (complete graph) – iga kahe sõlme vahel on kaar
- *Bikromaatiline graaf* (bipartite graph) – sõlmed on võimalik jagada kahte rühma selliselt, et iga serva üks ottest on ühes ja teine ottest on teises sõlmede rühmas
- *Graafi täiend* (complement) – $G^{-1}=(V,E^{-1})$, e. $E^{-1}=\{ \langle v_i, v_j \rangle \mid \langle v_i, v_j \rangle \notin E \}$
- *Alamgraaf* (subgraph) – $G_S=(V_S, E_S)$, $V_S \subseteq V$ & $E_S \subseteq E$
- *Kliik* (clique) – täielik alamgraaf
- *Maksimaalne kliik* – kliik, mis ei sisaldu üheski teises klikis
(mõned autorid nimetavad ainult maksimaalseid alamgraafe klikkideks)
- *Planaarne graaf* (tasandgraaf, planar graph) – kujutades tasandil ükski serv ei lõiku
- *Isomorfsed graafid* – üksühene vastavus sõlmede ja servade hulkade vahel



Näiteülesanne #1 – 3 kaevu & 3 maja, igas majast rada iga kaevuni?

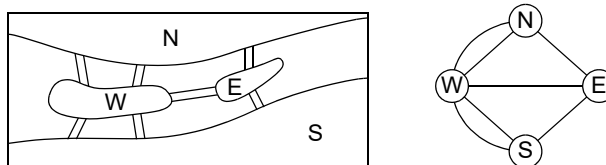
Bikromaatiline graaf – kas see graaf on planaarne? Ei ole, vaja on kõrgemat järku pinda!



Näiteülesanne #2 – Königsbergi sillad (L. Euler 1736)

On 2 saart & 7 silda – ületada iga sild täpselt üks kord, kas see on võimalik?

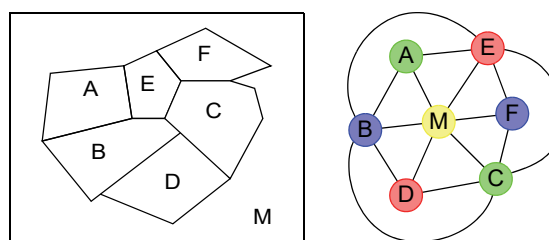
Ei ole, sest saarele jõudmisel peab olema võimalik ka lahkuda – vaja on paaris arvu sildu (sõlme aste paarisarv).



Näiteülesanne #3 – poliitilise kaardi värvimine

Planaarse graafi värvimine – mitu värvi on vaja?

Piisab neljast värvist (tõestatud).



Suunatud graafid - sisendaste (indegree) & väljundaste (outdegree) –

sõlme sisenevate & sõlmest väljuvate kaarte arv

alusgraaf (underlying graph) – sõlmede ja kaarte hulk sama, kuid puudub orienteeritus

Suunatud atsüklilised graafid (directed acyclic graphs, DAGs) – osaliselt järjestatud hulk

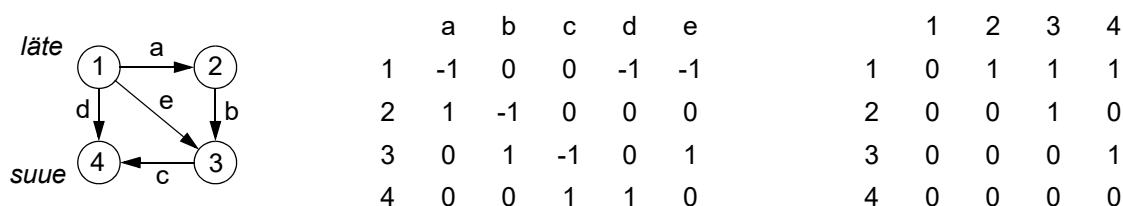
järglane (successor, descendant) – v_j on järglane v_i -le kui $\exists path(v_i, v_j)$

eellane (predecessor, ancestor), otsene järglane, otsene eellane

polaarne s.a.g. (polar dag) – $\exists$ läte (source) & suue (sink) ($\equiv$ võre)

- Intsidentsmaatriks (incidence matrix) – $|V|$ rida & $|E|$ veergu

- Naabrusmaatriks (adjacency matrix) – $|V|$ rida & veergu



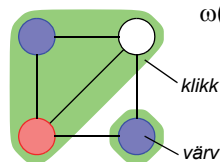
Perfektsed graafid (perfect graphs)

- klikiarv (clique number) – $\omega(G)$ – suurima kliki suurus
- tükeldus klikkideks – G on *tükeldatud* täielikeks mittekattuvateks alamgraafideks
- klikikate (clique cover) – G on *kaetud* täielike alamgraafidega
- klikikattearv (clique cover number) – $\kappa(G)$ – minimaalse klikikatte (-tükelduse) võimsus
- stabiilne hulk (stable set) – sõlmed hulgas ei ole kaarega ühendatud
- stabiilsusarv (stability number) – $\alpha(G)$ – suurima stabiilse hulga suurus
- graafi värvimine (coloring) – graafi tükeldamine stabiilseteks hulkadeks
- kromaatileine arv (chromatic number) – $\chi(G)$ – minimaalse stabiilseteks hulkadeks tükelduse võimsus

Graafi perfektsus

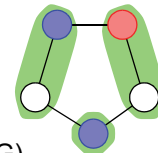
- tavaliselt – $\omega(G) \leq \chi(G)$ ehk $\alpha(G) \leq \kappa(G)$
- perfektsed graafid – $\omega(G) = \chi(G)$ ehk $\alpha(G) = \kappa(G)$

$$\begin{aligned}\omega(G) &= 3 \\ \kappa(G) &= 2 \\ \alpha(G) &= 2 \\ \chi(G) &= 3\end{aligned}$$



$$\omega(G) = \chi(G) \text{ \& } \alpha(G) = \kappa(G)$$

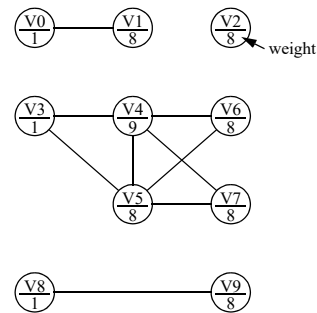
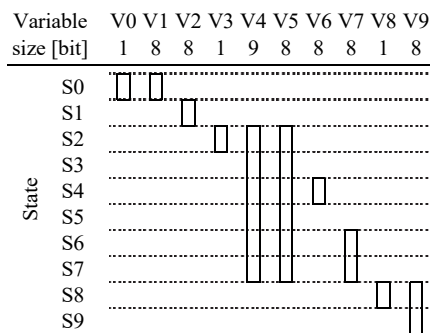
$$\omega(G) < \chi(G) \text{ \& } \alpha(G) < \kappa(G)$$



$$\begin{aligned}\omega(G) &= 2 \\ \kappa(G) &= 3 \\ \alpha(G) &= 2 \\ \chi(G) &= 3\end{aligned}$$

Kõõlgraafid (kolmnurk graafid, chordal graphs) – iga tsükel rohkem kui kolmest sõlmest omab kõõlu (chord)

Intervallgraafid (interval graphs) – sõlmed on võimalik seada vastavusse vahemikega selliselt, et kahe sõlme vahel on kaar, kui kaks intervalli kattuvad

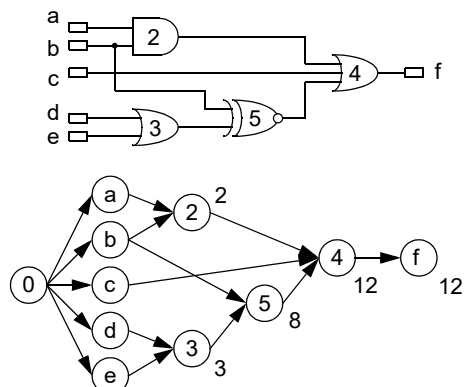


4. Graafid digitaalsüsteemide disainis

Disaini ülesanne #1 – viite leidmine ahelas

pikima tee ülesanne (ainult atsüklilised graafid)

- sõlm – loogikaelement, sõlme kaal – viide
- kaar – ühendused loogikaelementide vahel

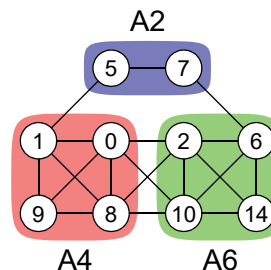


Disaini ülesanne #2 – lihtimplikantide hulga minimeerimine

minimaalse klikikatte leidmine graafil

- sõlm – oluline ('1') sisendvektorid (minterm)
- klikk – lihtimplikant (võimalus asendada hüperservadega)

Impl.	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
A1		x		x						
A2				x		x				
A3					x	x				
A4	x	x					x	x		
A5	x		x				x		x	
A6			x		x				x	x



Disaini ülesanne #3 – registre sidumine

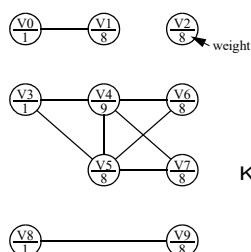
kaalutud (intervall)graafi värvimine

- sõlm – register, kaar – registrid on korraga kasutuses (intervallid kattuvad)

Variable size [bit]	V0	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
S0	1	1								
S1			1							
S2				1	1	1	1			
S3					1	1	1			
S4								1		
S5									1	
S6										1
S7										
S8										
S9										

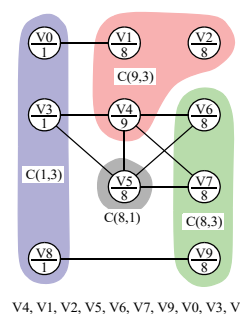
Lähteülesanne: intervallgraaf

Värvitud graaf

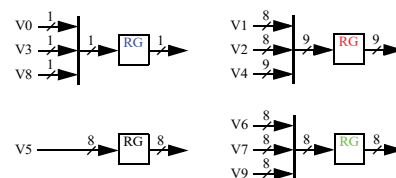


Konfliktigraaf

Lõpptulemus: registrid & multiplekserid



V4, V1, V2, V5, V6, V7, V9, V0, V3, V8



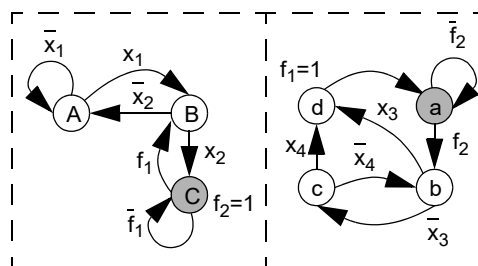
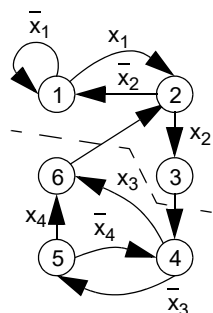
Disaini ülesanne #4 – algoritmi (automaadi) tükeldamine

kaalutud graafi tükeldamine

- sõlm – olek, kaar – siire + tingimused + sagedused/tõenäosused

lähteautomaat

vaheldumisi töötavad komponentautomaadid



5. Algoritmid ja keerukus

Algoritmi keerukus – kui kaua kulub aega ja kui palju on vaja resursse?

Keerukus – $O(n)$, $O(n^2)$, $O(2^n)$, jne.

- polünoomiaalne keerukus – P

- mitte-polünoomiaalne keerukus – NP

lahenduv polünoomiaalse ajaga, kui on võimalik õige tulemus ära arvata

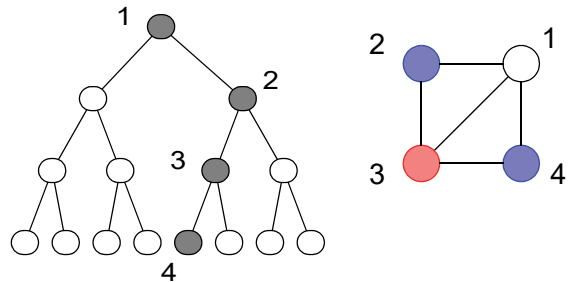
- kas $P \subseteq NP$ või $P=NP$ on siiani lahendamata!

Harude ja tõkete meetod (branch and bound method) – parim tulemus

Ahne meetod (greedy method) – piisavalt hea tulemus?

Ahne meetod

- Vali jooksev objekt
 - suurim, väikseim, juhuslik jne.
 - vali värvimata sõlm
- Teosta operatsioon
 - sidumine, eraldamine, värvimine jne.
 - vali legaalne värv
- Korda kuni operatsioonid on sooritatud kõikide objektidega
 - korda kuni kõik sõlmed on värvitud



Harude ja tõkete meetod

- Vali jooksev objekt
 - mis on antud kombinatsiooni korral veel kasutamata
 - vali värvimata sõlm
- Teosta operatsioon
 - sidumine, eraldamine, värvimine jne.
 - vali legaalne värv
- Kui vahetulemus on halvem jooksvast parimast, siis alusta uut kombinatsiooni
- Korda kuni operatsioonid on sooritatud kõigi objektidega
 - korda kuni kõik sõlmed on värvitud
- Jäta jooksev parim tulemus meelde
- Alusta uut kombinatsiooni

