

MATEMAATIKA

TÄIENDUSÕPE YMA0090

Kairi Kasemets

kairi.kasemets@ttu.ee
staff.ttu.ee/~kairik

1. Leida funktsooni

$$y = 5^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}}$$

määramis- ja muutumispiirkond.

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **paaris-funktsiooniks**, kui

$$f(-x) = f(x) \quad \text{iga } x \in X.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **paarituks funktsiooniks**, kui

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{iga } x \in X.$$

2. Kas funktsioon on paaris- või paaritu funktsioon?

$$f(x) = x^3 + x \cos x$$

3. Kas funktsioon on paaris- või paaritu funktsioon?

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x \sin x}$$

4. Kas funktsioon on paaris- või paaritu funktsioon?

$$f(x) = \frac{x^4 + 4}{(x^2 - 2)(x^2 + 1)}.$$

5. Kas funktsioon on paaris- või paaritu funktsioon?

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2} + \frac{2x^4 - x}{3x^3 - x}$$

6. Kas funktsioon on paaris- või paaritu funktsioon?

$$f(x) = \frac{15^x}{1 + 15^x}$$

Funktsiooni f nimetatakse perioodiliseks, kui leidub selline arv $T \neq 0$, et iga $x \in X$ korral ka $x \pm T \in X$ ja $f(x + T) = f(x)$. Vähimat positiivset arvu T , mille korral $f(x + T) = f(x) \forall x \in X$, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ perioodiks.

7. Kas funktsioon $f(x) = \cos(0,5x)$ on perioodiline funktsioon? Milline on ta periood?

8. Kas funktsioon $f(x) = \sin(\sqrt{2}x)$ on perioodiline funktsioon? Milline on ta periood?

9. Kas funktsioon $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ on perioodiline funktsioon? Milline on ta periood?

10. Kas funktsioon $f(x) = \cos(2x + 1)$ on perioodiline funktsioon? Milline on ta periood?

Eksponentfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $y = a^x$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$. Arvu a nimetatakse eksponentfunktsiooni aluseks.

Omadused:

- 1) $X = (-\infty; \infty)$;
- 2) $Y = (0; \infty)$;
- 3) $y = a^x$ graafik läbib y -teljel punkti $(0; 1)$.

11. Lahendada

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+5} > \sqrt{2}$$

12. Lahendada

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-5x} < \frac{1}{8}$$

13. Lahendada

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-14} = 64^{2x}$$

14. Lahendada

$$4^{x+1} + 4^x = 320$$

Logaritmifunktsioon $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) on eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon.

Arvu a nimetatakse logaritmi aluseks.

Kui $a = 10$, siis alust ei märgita ning $y = \log x$ nimetatakse logaritmifunktsiooniks alusel 10.

Kui $a = e$, siis kasutatakse tähistust $y = \ln x$ ja räägitakse naturaalogaritmist.

Omadused:

- 1) $X = (0; \infty)$;
- 2) $Y = (-\infty; \infty)$;
- 3) $y = \log_a x$ nullkoht $x = 1$.

15. Lahendada

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) < \log_{\frac{1}{2}}(2x - 8)$$

16. Lahendada

$$\log_5(x^2 - 11x + 43) < 2$$

17. Lahendada

$$\log(x + 1, 5) = -\log x$$

18. Lahendada

$$\log_x(x^2 - 3x + 9) = 2$$

Siinusfunktsioon $y = \sin x$.

Omadused:

- 1) $X = (-\infty; \infty)$;
- 2) $Y = [-1; 1]$;
- 3) $y = \sin x$ periood on 2π ;
- 4) $y = \sin x$ on paaritu funktsioon;
- 5) $y = \sin x$ nullkohad $x_n = n\pi$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

Koosinusfunktsioon $y = \cos x$.

Omadused:

- 1) $X = (-\infty; \infty)$;
- 2) $Y = [-1; 1]$;
- 3) $y = \cos x$ periood on 2π ;
- 4) $y = \cos x$ on paarisfunktsioon;
- 5) $y = \cos x$ nullkohad $x_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

Tangensfunktsioon $y = \tan x$.

Omadused:

- 1) Määramispiirkonda X kuuluvad kõik reaalarvud x , välja arvatud $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $Y = (-\infty; \infty)$;
- 3) $y = \tan x$ periood on π ;
- 4) $y = \tan x$ on paaritu funktsioon;
- 5) $y = \tan x$ nullkohad $x_n = n\pi$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

19. Antud on funktsioon $y = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

1) Skitseerida selle funktsiooni graafik lõigul $\left[0; \frac{9\pi}{4} \right]$.

2) Leida joonise abil lõigul $\left[0; \frac{9\pi}{4} \right]$:

a) funktsiooni väärtus, kui $x = 0$;

b) x väärtused, mille korral $f(x) < 0$;

c) funktsiooni kasvamisvahemik.

20. Leida funktsiooni $y = 5 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ graafiku maksimumpunkti koordinaadid vahemikus $(0; 2\pi)$.

Arvu B nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ piirväärtuseks kohal a , kui igale argumendi väärtuste jadale (x_n) , mille puhul piirväärtuseks on a ning $x_n \neq a$, vastab funktsiooni väärtuste jada $(f(x_n))$, mille piirväärtuseks on B .

Sümbolites $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, siis $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$.

Funktsiooni piirväärtuse omadused:

1. Kui leiduvad $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$ ning $f(x) \leq g(x)$, siis

$$\lim f(x) \leq \lim g(x).$$

2. Kui leiduvad $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$, siis

$$\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x).$$

3. Kui leiduvad $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$, siis

$$\lim [f(x) - g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x).$$

4. Kui leiduvad $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$, siis

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$$

5. Kui leiduvad $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$, kusjuures $\lim g(x) \neq 0$, siis

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

6. Kui leidub $\lim f(x)$, siis iga konstandi c korral

$$\lim (cf(x)) = c \lim f(x).$$

Olulisi piirväärtusi:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Määramatused:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \text{ ja } \infty - \infty.$$

21. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 12}{3x - 4x^2}$$

22. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 - 5x - 24}$$

23. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x - 1} - 3}{x^2 - 100}$$

24. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 + \sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt[3]{9x^3 + 1} - 12x}$$

25. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 + 3x}{-5x}$$

26. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{1 + 3x^2 + 3x^3}$$

27. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x - 1}$$

28. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{2x + 8}$$

29. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

30. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{x^2 - 25} \right)$$

31. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{-1-x}$$

32. Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$$