

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
Loodusteaduskond
Küberneetika instituut

YMX0261

ISESEISEV TÖÖ
VARIANT IV

Tarmo Prillop
178206IASM
17.12.2018

Tallinn 2018

1. Ülesanne 1

Esimese ülesande eesmärgiks on leida, etteantud temperatuurisõltuvuse põhjal, temperatuuri väärtus, mille puhul on tihvti diameeter etteantud väärtusega ($d = 0.9\text{cm}$).

Temperatuurisõltuvus on antud järgneva mittelineaarse seosena:

$$f(d, T) = (4 \cdot 10^{-5}) \cdot T^3 + (5 \cdot 10^{-2}) \cdot T + 0.92 - 10^{-1} \cdot d \quad (1)$$

Selleks et leida sobiv väärtus on vajalik lahendada võrrand $f(d = 0.9, T) = 0$. Lahendamise esimese sammuna asendame etteantud diameetri valemisse (1) :

$$f(T) = (4 \cdot 10^{-5}) \cdot T^3 + (5 \cdot 10^{-2}) \cdot T + 0.02 \quad (2)$$

Ülesande lahendamiseks on erinevaid mooduseid. Antud lahenduses valiti kasutamiseks Newtoni meetod mittelineaarseteks võrranditeks. Newtoni meetodi lahenduseeskiri on antud järgneva valemiga:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (3)$$

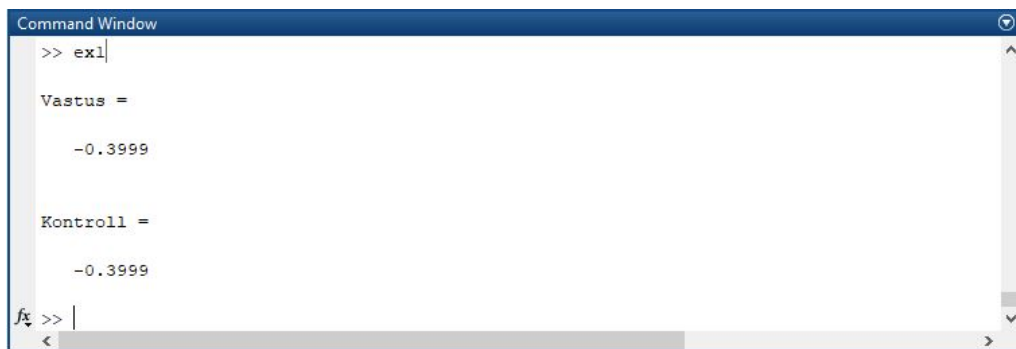
Lahendamiseks on vajalik leida tuletis funktsioonist $f(T)$ (vt. valem (2)) ning see on järgnev:

$$f'(T) = 0.00012 \cdot (T^2 + 3750) \quad (4)$$

Seega otsitava temperatuuri saame leida seega järgneva valemiga :

$$T_n = T_{n-1} - \frac{(4 \cdot 10^{-5}) \cdot T_{n-1}^3 + (5 \cdot 10^{-2}) \cdot T_{n-1} + 0.02}{0.00012 \cdot (T_{n-1}^2 + 3750)} \quad (5)$$

Alglähend (otsitavale suurusele küllalt lähedal paiknev arv), on võimalik leida graafikult (vt. Joonis 2). Selleks valiti $T_0 = -0.2[^\circ\text{C}]$. Valemi (5) iteratiivsel rakendamisel, kuni sobiva täpsuseni, leiti lahend, milleks on $T \approx -0.4^\circ\text{C}$. Antud temperatuuri juures on tihvti diameeter 0.9cm . Vastus on nähtav ka alljärgnevalt jooniselt. Matlabi skript ülesande lahendamiseks on esitatud joonisel 3.



```
Command Window
>> ex1

Vastus =

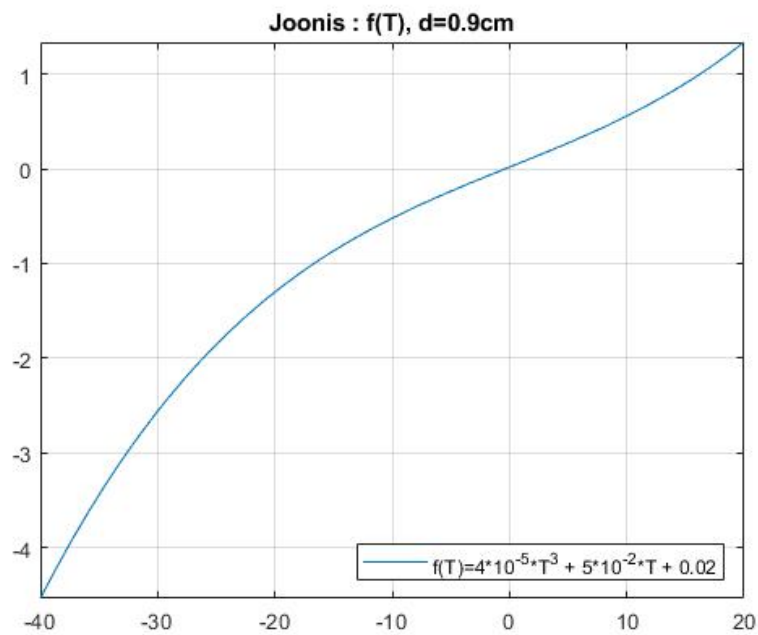
    -0.3999

Kontroll =

    -0.3999

fx >> |
```

Joonis 1. Ülesande 1 vastus



Joonis 2. Ülesande 1 lahendamisel kasutatud graafik

```

1 %-----
2 % Ylesanne 1
3 %-----
4 clear
5 % f(T) - diameetri s6ltuvus temperatuurist, kui d=0.9
6 f=@(T) (4*10^-5)*T.^3 + (5*10^-2)*T + 0.02;
7
8 % Graafiku joonestamine
9 fplot(f, [-40 20]);
10 grid on;
11 title('Joonis : f(T), d=0.9cm');
12 legend('f(T)=4*10^{-5}*T^3 + 5*10^{-2}*T + 0.02')
13 % Valime alg12hendi graafikult
14 T_0 = -0.2;
15
16 % Funktsiooni f(T) tuletis on j2rgmine:
17 % f'(T) = 0.00012*(T^2 + 3750) = 0
18
19 %Leia lahendi kasutades Newtoni meetodit
20 while abs(f(T_0)) > 10^-6
21     T_0 = T_0 - ((4*10^-5)*T_0^3 + (5*10^-2)*T_0 + 0.02)/...
22         (0.00012*(T_0^2 + 3750));
23 end
24
25 % Vastuse v21jatrykk
26 Vastus = T_0
27 Kontroll = fzero(f, -0.2)

```

Joonis 3. Ülesande 1 lahenduseeskiri

2. Ülesanne 2

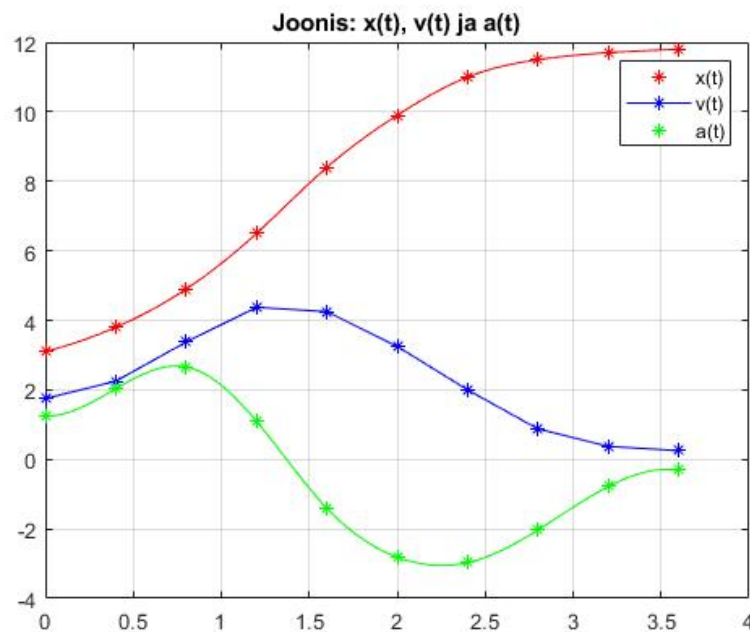
Ülesande eesmärgiks oli leida keha kiirenduse nullpunkt (ajahetk ja keha koordinaadid kui kiirendus on võrdne nulliga), kui on teada keha koordinaadid etteantud ajahetkedel. Mõõtmistulemused tabelina olid järgnevad:

$t(s)$	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6
$x(dm)$	3.1	3.8	4.9	6.5	8.4	9.9	11	11.5	11.7	11.8

Ülesande lahendamiseks on vaja leida antud mõõtmistulemuste põhjal funktsioon, mis kirjeldaks keha kiirendust. Üldisemal juhul on keha kiirendus antud valemiga

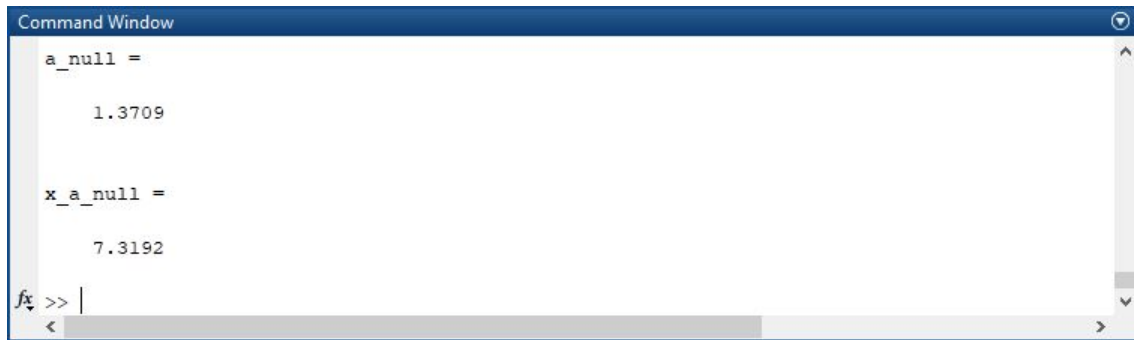
$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad (6)$$

Antud valemist lähtuvalt on meil vaja leida teist järku tuletist kirjeldav funktsioon, kasutades etteantud punkte. Teist järku tuletise numbriliseks leidmiseks on erinevaid meetodeid. Antud lahenduses rakendati kaks korda funktsiooni esimest järku tuletise leidmiseks vajalikke diferentsvõrrandeid : diferentsvõrrand sammuga ette, keskmistatud diferentsvõrrand ja diferentsvõrrand sammuga taha. Esimest ja viimas rakendati graafiku otspunktides ning ülejäänud punktides kasutati keskmistatud diferentsvõrrandit. Ehk kõigepealt leiti keha koordinaatide muutuste järgi keha kiirus ning sellest omakorda leiti keha kiirendused antud ajahetkedel. Graafik mis kujutab antud ja leitud suurusi on nähtav joonisel 4.



Joonis 4. Ülesande 2 lahendamisel kasutatud graafik

Olles leidnud keha kiirendused etteantud punktides, leiti kuupsplainid ($S^{3,2}$) nii keha koorinaatidele kui ka keha kiirendusele. Keha kiirenduse nullpunkti leidmiseks kasutati Matlabi sisseehitatud funktsiooni *fzero*. Olles leidnud ajahetke millal keha kiirendus oli null, oli võimalik leida keha koordinaat sellel ajahetkel. Tulemuseks oli, et keha kiirendus $a = 0[dm/s^2]$, ajahetkel $t \approx 1.371[s]$ ning keha koordinaat sellel ajahetkel on $x(t) \approx 7.32[dm]$. Vastus on nähtav ka alljärgneval joonisel. Arvutuseeskiri Matlabi skriptina on nähtav joonisel 6.



```
Command Window
a_null =
    1.3709

x_a_null =
    7.3192

fx >> |
```

Joonis 5. Ülesande 2 vastus

```

1 %-----
2 % Ylesanne 2
3 %-----
4 clear
5
6 % L2hteandmed
7 h=0.4;                                %Sammu pikkus
8 t=0:h:3.6;
9 x=[3.1,3.8,4.9,6.5,8.4,9.9,11,11.5,11.7,11.8];
10
11 %Leiame kiiruse (v=dx/dt)
12 v(1) = (x(2)-x(1))/h;                %Diferentsvalem sammuga ette
13 v(10) = (x(10)-x(9))/h;             %Diferentsvalem sammuga taha
14 for i=2:9
15     v(i) = (x(i+1) - x(i-1))/(2*h); %Keskmistatud diferentsvalem
16 end
17
18 %Leiame kiirenduse a=dv/dt
19 a(1) = (v(2)-v(1))/h;                %Diferentsvalem sammuga ette
20 a(10) = (v(10)-v(9))/h;             %Diferentsvalem sammuga taha
21 for i=2:9
22     a(i) = (v(i+1) - v(i-1))/(2*h); %Keskmistatud diferentsvalem
23 end
24
25 %F-ni a interpolatsioon kuupsplainiga
26 tvork=0:10^-3:3.6;
27 a_splain = interp1(t,a,tvork,'spline');
28
29 %F-ni x interpolatsioon kuupsplainiga
30 x_splain = interp1(t,x,tvork,'spline');
31
32 %Leitud kuupsplain funktsioonina
33 f_a=@(z)interp1(t,a,z,'spline');
34 f_x=@(z)interp1(t,x,z,'spline');
35
36 % Graafikute joonestamine
37 plot(t,x,'r*');
38 hold on;
39 grid on;
40 plot(t,v,'-b*');
41 plot(t,a,'g*');
42 plot(tvork,a_splain,'Green');
43 plot(tvork,x_splain,'Red');
44 title('Joonis: x(t), v(t) ja a(t)');
45 legend('x(t)', 'v(t)', 'a(t)');
46
47 % Kiirenduse nullpunkti leidmine
48 a_null=fzero(f_a,1.369)
49 x_a_null = f_x(a_null)

```

Joonis 6. Ülesande 2 lahenduseeskiri

3. Ülesanne 3

Ülesande eesmärgiks oli leida etteantud mõõtmistulemuste põhjal vedru venitamisel tehtud mehaaniline töö. Mõõtmistulemused olid järgnevad:

$x(\text{cm})$	0	1	2	3	4	5	6
$F(\text{N})$	0	5.1	10.2	16.1	25.4	40.2	61.9

Mõõtmistulemustest on näha, et rakendatud jõu F ja vedru otspunkti kaugus otspunktist x ei ole lineaarses seoses, ehk idealiseeritud Hooke'i seadus $F = k \cdot x$ ei kirjelda antud juhul täielikult mõõtmistulemusi. Väga levinud on vedrude kirjeldamisel Georg Duffing'u järgi nimetatud seos, mis väidab, et rakendatud jõu F ja vedru otspunkti kauguse x vahel esineb kuupsõltuvus järgneval kujul:

$$F = (1 + \epsilon \cdot x^2) \cdot x \quad (7)$$

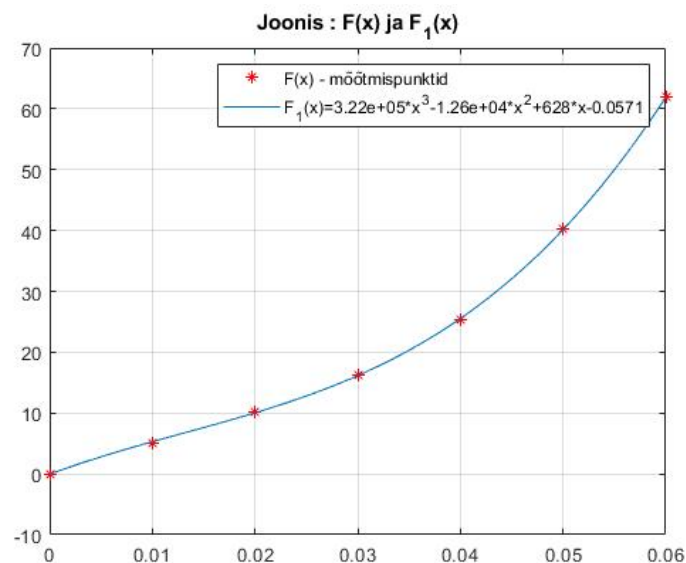
Mehaaniline töö on jõu $\vec{F}$ ja jõu mõjul tekkinud nihke $\vec{s}$ skalaarkorrutisega, ehk

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\alpha) \quad (8)$$

Tekkinud nihe s on avaldatav kui $s = x_2 - x_1$. Antud ülesandes võib eeldada, et jõud on samasuunaline nihkega, ehk $\alpha = 0 \rightarrow \cos(\alpha) = 1$ Üldisemal juhul on tehtav töö arvutatav järgneva integraaliga:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (9)$$

Antud ülesande lahendamine taandub seega numbrilisele integreerimisele, kus kõver $F(x)$ on määratud etteantud mõõtmistulemustega ning arvestab asjaolu, et rakendatud jõu ja vedru otspunkti kauguse vahel eksisteerib kolmanda astme sõltuvus. Järgneval joonisel on kujutatud graafik mõõtmispunktidega ning interpoleerimiseks kasutatud funktsioon:



Joonis 7. Ülesande 3 lahendamisel kasutatud graafik

Numbriliseks integreerimiseks lahenduse leidmisel kasutati Matlabi sisseehitatud funktsiooni '*quadv*', mis põhineb Simpsoni meetodil. Ning tulemuseks oli, et vedru venitamisel tehtud töö oli $A \approx 1.264$ [J] (vt. Joonis 8). Ülesande lahendamiseks kasutatud skript on nähtav joonisel 9.



Joonis 8. Ülesande 3 vastus

```

1 %-----
2 % Ylesanne 3
3 %-----
4 clear
5 % L2hteandmed
6 x = 0:0.01:0.06;
7 F = [0, 5.1, 10.2, 16.2, 25.4, 40.2, 61.9];
8
9 %Kolmanda astme polynoomi kordajate leidmine
10 p=polyfit(x,F,3);
11
12 %Graafiku punktid leitud polynoominle
13 x_vork = 0:1e-6:0.06;
14 y = polyval(p,x_vork);
15
16 %Graafiku joonestamine
17 plot(x,F,'r*');
18 grid on;
19 hold on;
20 plot(x_vork,y);
21 title('Joonis : F(x) ja F_1(x)');
22 legend('F(x) - mtmispunktid', ...
23       strcat('F_1(x)=',num2str(p(1),3),'*x^3',num2str(p(2),3),'*x^2+',...
24       num2str(p(3),3),'*x',num2str(p(4),3)));
25
26 % Kolmanda astme polynoomi v6rrand arvutatud kordajatega
27 F_1 = @(x) [p(1)*x^3 + p(2)*x^2 + p(3)*x + p(4)];
28
29 % Tehtud mehaanilise t66 arvutamine
30 A=quadv(F_1,0,0.06)

```

Joonis 9. Ülesande 3 lahenduseeskiri