

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.

Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Taylori valemit: funktsiooni $f(x)$ Taylori valem punktis a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

$$\text{kus } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \xi \in (x, a).$$

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a + h$, kus $h > 0$. Seame eesmärgiks leida $f'(a)$. Selleks esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a + h$. Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus $\xi \in (x, a)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku h .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga $taha$. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a - h$, kus $h > 0$. Esitame funktsiooni $f(x)$ Tayloriga valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$.

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus $\xi \in (a - h, a)$.

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a - h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga h** .

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku h .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema n korral. Olgu teada funktsiooni $f(x)$ väärtused punktides $a - h$ ja $a + h$, kus $h > 0$. Leiame Taylori valemi $n = 2$ korral, kui $x = a + h$, siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kordame arutluskäiku, kui $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$ ja Taylorig valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$.

Lahutame seosest (*) seose (**):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2 .

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks. Peaksime selleks teadma funktsiooni $f(x)$ väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks $a - h$, a ja $a + h$, kus $h > 0$. Paneme kirja Tayloriga valemi järguni $n = 3$ kahel juhul: kõigepealt $x = a + h$, siis $x - a = a + h - a = h$, teiseks $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$. Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (****)$$

$\xi \in (a, a + h)$ ja $\eta \in (a - h, a)$.

Liidame seosed (***) ja (****), saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Siis

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi) + f^{IV}(\eta)}{4!}h^2$$

ning

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Rohkemaid diferentsvalemeid saab leida arvutusmeetodite käsiraamatutest.

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui $[a, b]$ on tükeldatud, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Kui $[a; b]$ on jaotatud ühtlaselt, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ning $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{a-b}{n}$, siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Võttes $p_i = x_i$, saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus C on konstant.

Tuletame mõned kõrgema täpsusega kvadratuurvalemid. Üldiselt on kõik sellised kvadratuurvalemid esitatavad kujul

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

kus A_i on mingid kordajad ja $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Newton-Cotesi kvadratuurvalem

Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ tema polünomiaalse interpolandiga sõlmedes $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$f(x) \approx \Phi_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i),$$

kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Siis

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b \Phi_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x)f(x_i)dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_a^b L_{n,i}(x)f(x_i)dx = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b L_{n,i}(x)dx \right] f(x_i).\end{aligned}$$

Tähistades $A_i = \int_a^b L_{n,i}(x)dx$, olemegi saanud **Newton-Cotesi kvadratuurvalemi**

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Kordajate A_i leidmiseks on vaja arvutada

$$A_i = \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} dx.$$

Ühtlase võrgu korral ($h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$) avaldub

$$A_i = (b - a)B_i,$$

kus B_i väärtusi saab leida käsiraamatutest.

Näiteks

n	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	-	-
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	-	-
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	-
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

Kui $n = 1$, siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

Kui $n = 2$, siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus $C > 0$ on konstant, mis ei sõltu n ja M_n on $|f^{(n+1)}(x)|$ maksimaalne väärtus lõigul $[a, b]$.

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes $x_0, x_1, \dots, x_n$. Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit $n = 1$ korral (võtame $a = x_{i-1}$ ja $b = x_i$), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemi viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Et lõigul $[a, b]$ leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil $n = \frac{b-a}{h}$, seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, $\dots$, $[x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.

Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osaloike kokku $\frac{n}{2}$, absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^4.$$