

7. harjutus

1. Teada on

x	1	2	3	4
y	0	8	5	6

Leidke Lagrange'i ja Newtoni interpolatsioonipoliinoom. Tehke joonis.

2. Teada on

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	8	5	6	2	4	3

Lähendage seda funktsiooni lineaar- ja ruutsplainiga. Tehke joonis.

3. Teada on

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	8	5	6	2	4	3	1

Lähendage seda funktsiooni kuupsplainiga $S^{3,2}(x)$. Tehke joonis.

4. Tabelis on esitatud andmed hobuse kohta, kes jooksis 1,25 miili ajaga alla 2 minuti:

$s(miilid)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25
$t(sek)$	0	25	49,4	73	96,4	119,4

Lähendage neid andmeid lineaarsplaini $S^{1,0}(x)$ ja kuupsplainiga $S^{3,2}(x)$. Tehke joonis. Arvutage aeg, mis kuluks 0,45 miili läbimiseks.

5. Teada on

t	1	2	5	8	11	12
y	5	8	14	26	50	98

Lähendage neid andmeid lineaar- ja ruutfunktsiooniga. Tehke joonis. Arvutage ruutinterpolandi väärtus, kui $t = 3$ ja $t = 9$.

6. Teada on

x	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	9,08	10,43	11,9	13,48	15,19	17,03	19,01	21,13	23,39

Lähendage seda funktsiooni kuupsplainiga $S^{3,2}(x)$ ning vähimruutude mõttes kuupfunktsiooniga. Tehke joonis. Arvutage funktsiooni väärtus $x = 1,12$ ja $x = 1,35$ korral.

7. Lähendage 6. ülesandes esitatud funktsiooni kuupfunktsiooniga vähimruutude mõttes järgnevaid kaalusid arvestades

κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6	κ_7	κ_8	κ_9
1	1	2	5	1	4	2	2	1

Tehke joonis, kus on lähteandmed ning ülesandes 6. leitud lähendajad ning nüüd saadud interpolant.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \dots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks. Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \dots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \dots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$

Lineaarne juht Otsime lähendajat kujul $\Phi(x) = c_1 x + c_2$, siis funktsionaal on kujul

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i))^2.$$

Osatuletiste leidmisega saame lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Kui minna summamärgiga iga liikme juurde, saame

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \end{cases}$$

Ruutlähend Otsime lähendajat kujul $\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, siis funktsionaal on kujul

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i^2 + c_2 x_i + c_3 - f(x_i))^2.$$

Osatuletiste leidmisega saame lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_3} = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot (c_1 x_i^2 + c_2 x_i + c_3 - f(x_i)) \cdot x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot (c_1 x_i^2 + c_2 x_i + c_3 - f(x_i)) \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot (c_1 x_i^2 + c_2 x_i + c_3 - f(x_i)) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Kui minna summamärgiga iga liikme juurde, saame

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^4 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^3 + c_3 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^2 = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i^2 \\ c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^3 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^2 + c_3 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i + c_3 \sum_{i=0}^n \kappa_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \end{cases}$$