

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n + 1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsiooni sõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots$$

Leidub parajasti üks ülimalt n –astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Kui summa lahti kirjutada on polünoom kujul

$$\begin{aligned}\Phi(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_n)} \cdot f(x_0) + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} \cdot f(x_1) + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} \cdot f(x_2) + \dots + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} \cdot f(x_n).\end{aligned}$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks**.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$,
 $j = 0, 1, \dots, n$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Diferentssuhte

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhte

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhte

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab m –järku diferentssuhte esitada $m - 1$ –järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Polünoomi

$$\begin{aligned}\Phi(x) = & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\end{aligned}$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks**.

$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe n –astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpolateerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusale, kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusale. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse l –astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \rightarrow \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \rightarrow 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \rightarrow 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.

Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Interpoleerimine splineidega

Definitsioon

l -järku splineiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:

- 1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l -astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;*
- 2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.*

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplineide ehk B-splineide abil.

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^k c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \dots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on spline, mis $[-1; 1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.

Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2; -1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1; 2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada B -splainide lineaarkombinatsioonina.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \dots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \dots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \dots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$

Lineaarne juht Otsime lähendajat kujul $\Phi(x) = c_1 x + c_2$, siis funktsionaal on kujul

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i))^2.$$

Osatuletiste leidmisega saame lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Kui minna summamärgiga iga liikme juurde, saame

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \end{cases}$$

Ruutlähend Otsime lähendajat kujul $\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, siis funktsionaal on kujul

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i \left(c_1 x_i^2 + c_2 x_i + c_3 - f(x_i) \right)^2.$$

Osatuletiste leidmisega saame lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_3} = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot \left(c_1 x_i^2 + c_2 x_i + c_3 - f(x_i) \right) \cdot x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot \left(c_1 x_i^2 + c_2 x_i + c_3 - f(x_i) \right) \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot 2 \cdot \left(c_1 x_i^2 + c_2 x_i + c_3 - f(x_i) \right) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Kui minna summamärgiga iga liikme juurde, saame

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^4 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^3 + c_3 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^2 = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i^2 \\ c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^3 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^2 + c_3 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i x_i + c_3 \sum_{i=0}^n \kappa_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \end{cases}$$