

Võrrandite lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus $f(x)$ on ühemuutuja funktsioon. Näiteks

$$2x + 4 = 0, \quad x = -2$$

$$3x^2 + 18x - 21 = 0, \quad x_1 = -7, \quad x_2 = 1$$

$$\sin x = 1, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Võrrandite lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus $f(x)$ on ühemuutuja funktsioon. Näiteks

$$2x + 4 = 0, \quad x = -2$$

$$3x^2 + 18x - 21 = 0, \quad x_1 = -7, \quad x_2 = 1$$

$$\sin x = 1, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Definitsioon

Arvu x^* nimetatakse võrrandi $f(x) = 0$ lahendiks (funktsiooni $f(x)$ nullkohaks), kui

$$f(x^*) \equiv 0.$$

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend x_0 , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

Alglähendi leidmine Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend x_0 , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

Alglähendi leidmine Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend x_0 , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

Alglähendi leidmine Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend x_0 , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

Alglähendi leidmine Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend x_0 , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

Alglähendi leidmine Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend x_0 , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

Alglähendi leidmine Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Graafiline meetod

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand $f(x) = 0$ kirjutada ümbes kujule $f_1(x) = f_2(x)$ ning joonistada kahe funktsiooni $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglähendi.

Näide. Näiteks võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ võib kirjutada kujul $x^3 = 1 - 2x$ ja siit joonistada $y = x^3$ ja $y = 1 - 2x$ graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta $0,4 \sim 0,5$.

Graafiline meetod

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand $f(x) = 0$ kirjutada ümbes kujule $f_1(x) = f_2(x)$ ning joonistada kahe funktsiooni $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglähendi.

Näide. Näiteks võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ võib kirjutada kujul $x^3 = 1 - 2x$ ja siit joonistada $y = x^3$ ja $y = 1 - 2x$ graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta $0,4 \sim 0,5$.

Graafiline meetod

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand $f(x) = 0$ kirjutada ümbes kujule $f_1(x) = f_2(x)$ ning joonistada kahe funktsiooni $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglähendi.

Näide. Näiteks võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ võib kirjutada kujul $x^3 = 1 - 2x$ ja siit joonistada $y = x^3$ ja $y = 1 - 2x$ graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta $0,4 \sim 0,5$.

Tabel

Kui $f(x)$ on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.

Meie näite puhul $f(0,4) = -0,136$ ja $f(0,5) = 0,125$.

Tabel

Kui $f(x)$ on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.

Meie näite puhul $f(0,4) = -0,136$ ja $f(0,5) = 0,125$.

Tabel

Kui $f(x)$ on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.

Meie näite puhul $f(0,4) = -0,136$ ja $f(0,5) = 0,125$.

Poolitamismeetod

Selle korral arvutatakse funktsiooni $f(x)$ väärtus lõigu $[x_0, x_1]$ keskpunktis $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$. Edasi võetakse vaatluse alla see poollõik, mille otstes on funktsiooni väärtustel erinev väärtus (seal asub vähemalt üks võrrandi $f(x) = 0$ lahend) ja arvutatakse funktsiooni väärtus poollõigu keskpunktis. Valitakse uus poollõik ja korratakse protseduuri, kuni saame lähendile piisavalt täpsed tõkked.

Poolitamismeetod

Selle korral arvutatakse funktsiooni $f(x)$ väärtus lõigu $[x_0, x_1]$ keskpunktis $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$. Edasi võetakse vaatluse alla see poollõik, mille otstes on funktsiooni väärtustel erinev väärtus (seal asub vähemalt üks võrrandi $f(x) = 0$ lahend) ja arvutatakse funktsiooni väärtus poollõigu keskpunktis. Valitakse uus poollõik ja korratakse protseduuri, kuni saame lähendile piisavalt täpsed tõkked.

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand $f(x) = 0$ teisendada kujule

$$x = g(x), \quad (1)$$

kus $g(x)$ on mingi ühe muutuja funktsioon.
Üks võimalus selleks on valida $C \neq 0$ ning

$$f(x) = 0 \mid \cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame $g(x) = x + Cf(x)$ ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand $f(x) = 0$ teisendada kujule

$$x = g(x), \quad (1)$$

kus $g(x)$ on mingi ühe muutuja funktsioon.

Üks võimalus selleks on valida $C \neq 0$ ning

$$f(x) = 0 \mid \cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame $g(x) = x + Cf(x)$ ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand $f(x) = 0$ teisendada kujule

$$x = g(x), \quad (1)$$

kus $g(x)$ on mingi ühe muutuja funktsioon.
Üks võimalus selleks on valida $C \neq 0$ ning

$$f(x) = 0 \mid \cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame $g(x) = x + Cf(x)$ ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

Näide

Võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ korral võib leida

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ või

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Näide

Võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ korral võib leida

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ või

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad (2)$$

st $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, jne.

Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad (2)$$

st $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, jne.

Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.

Kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0,$$

siis koondub lähend x_n täpseks lahendiks x^* , st $x_n \rightarrow x^*$.

Oluline tingimus sellise koondumise jaoks on

$$|g'(x)| \leq q < 1. \quad (3)$$

Kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0,$$

siis koondub lähend x_n täpseks lahendiks x^* , st $x_n \rightarrow x^*$.

Oluline tingimus sellise koondumise jaoks on

$$|g'(x)| \leq q < 1. \quad (3)$$

Näide

Jätkame näitega, kus oli vaja lahendada võrrand $x^3 + 2x - 1 = 0$.

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ ja

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Leidsime, et alglähendiks x_0 sobib 0,5. Alglähend

$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7]$.

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui $x = 0,5(1 - x^3)$, siis $g(x) = 0,5(1 - x^3)$ ning $g'(x) = -1,5x^2$.

$|g'(0,1)| = 0,015 < 1$, samuti $|g'(0,7)| = 0,735 < 1$.

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$, siis $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ ja $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

$|g'(0,1)| = 1,04 > 1$ ja $|g'(0,7)| = 4,167 > 1$.

Tingimus (3) pole täidetud.

Näide

Jätkame näitega, kus oli vaja lahendada võrrand $x^3 + 2x - 1 = 0$.

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ ja

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Leidsime, et alglähendiks x_0 sobib 0,5. Alglähend

$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7]$.

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui $x = 0,5(1 - x^3)$, siis $g(x) = 0,5(1 - x^3)$ ning $g'(x) = -1,5x^2$.

$|g'(0,1)| = 0,015 < 1$, samuti $|g'(0,7)| = 0,735 < 1$.

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$, siis $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ ja $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

$|g'(0,1)| = 1,04 > 1$ ja $|g'(0,7)| = 4,167 > 1$.

Tingimus (3) pole täidetud.

Näide

Jätkame näitega, kus oli vaja lahendada võrrand $x^3 + 2x - 1 = 0$.

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ ja

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Leidsime, et alglähendiks x_0 sobib 0,5. Alglähend

$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7]$.

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui $x = 0,5(1 - x^3)$, siis $g(x) = 0,5(1 - x^3)$ ning $g'(x) = -1,5x^2$.

$|g'(0,1)| = 0,015 < 1$, samuti $|g'(0,7)| = 0,735 < 1$.

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$, siis $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ ja $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

$|g'(0,1)| = 1,04 > 1$ ja $|g'(0,7)| = 4,167 > 1$.

Tingimus (3) pole täidetud.

Näide

Jätkame näitega, kus oli vaja lahendada võrrand $x^3 + 2x - 1 = 0$.

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ ja

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Leidsime, et alglähendiks x_0 sobib 0,5. Alglähend

$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7]$.

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui $x = 0,5(1 - x^3)$, siis $g(x) = 0,5(1 - x^3)$ ning $g'(x) = -1,5x^2$.

$|g'(0,1)| = 0,015 < 1$, samuti $|g'(0,7)| = 0,735 < 1$.

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$, siis $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ ja $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

$|g'(0,1)| = 1,04 > 1$ ja $|g'(0,7)| = 4,167 > 1$.

Tingimus (3) pole täidetud.

Näide

Jätkame näitega, kus oli vaja lahendada võrrand $x^3 + 2x - 1 = 0$.
Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ ja

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Leidsime, et alglähendiks x_0 sobib 0,5. Alglähend

$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7]$.

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui $x = 0,5(1 - x^3)$, siis $g(x) = 0,5(1 - x^3)$ ning $g'(x) = -1,5x^2$.

$|g'(0,1)| = 0,015 < 1$, samuti $|g'(0,7)| = 0,735 < 1$.

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$, siis $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ ja $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

$|g'(0,1)| = 1,04 > 1$ ja $|g'(0,7)| = 4,167 > 1$.

Tingimus (3) pole täidetud.

Näide

Jätkame näitega, kus oli vaja lahendada võrrand $x^3 + 2x - 1 = 0$.

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ ja

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Leidsime, et alglähendiks x_0 sobib 0,5. Alglähend

$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7]$.

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui $x = 0,5(1 - x^3)$, siis $g(x) = 0,5(1 - x^3)$ ning $g'(x) = -1,5x^2$.

$|g'(0,1)| = 0,015 < 1$, samuti $|g'(0,7)| = 0,735 < 1$.

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$, siis $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ ja $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

$|g'(0,1)| = 1,04 > 1$ ja $|g'(0,7)| = 4,167 > 1$.

Tingimus (3) pole täidetud.

Oleme leidnud koonduva hariliku iteratsioonimeetodi. Seega saame leida võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ ligikaudse lahendi eeskirjaga

$$x_n = 0,5(1 - x_{n-1}^3)$$

ehk

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = 0,5(1 - x_0^3) = 0,5(1 - 0,5^3) = 0,4375$$

$$x_2 = 0,5(1 - x_1^3) \approx 0,4581$$

$$x_3 = 0,5(1 - x_2^3) \approx 0,4519$$

...

$$x_{10} \approx x_{11} \approx 0,4534.$$

Kontrolliks $0,4534^3 + 2 \cdot 0,4534 - 1 \approx 6,14 \cdot 10^{-6}$.

Oleme leidnud koonduva hariliku iteratsioonimeetodi. Seega saame leida võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ ligikaudse lahendi eeskirjaga

$$x_n = 0,5(1 - x_{n-1}^3)$$

ehk

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = 0,5(1 - x_0^3) = 0,5(1 - 0,5^3) = 0,4375$$

$$x_2 = 0,5(1 - x_1^3) \approx 0,4581$$

$$x_3 = 0,5(1 - x_2^3) \approx 0,4519$$

...

$$x_{10} \approx x_{11} \approx 0,4534.$$

Kontrolliks $0,4534^3 + 2 \cdot 0,4534 - 1 \approx 6,14 \cdot 10^{-6}$.

Newtoni meetod

Vaatame võrrandit $f(x) = 0$. Hariliku iteratsioonimeetodi korral $x = g(x)$, kus $g(x) = x + Cf(x)$ (C on suvaline konstant).

Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et $|g'(x)| \leq q < 1$, kusjuures mida väiksem q , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi C nii, et $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$ oleks x^* lähedal võimalikult väike.

Võime valida igal iteratsioonisammul erineva C väärtuse. Kui x_{n-1} on leitud, siis valime C nii, et $g'(x_{n-1}) = 0$ ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi C suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x_{n-1}) = x_{n-1} + Cf(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Newtoni meetod

Vaatame võrrandit $f(x) = 0$. Hariliku iteratsioonimeetodi korral $x = g(x)$, kus $g(x) = x + Cf(x)$ (C on suvaline konstant).

Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et $|g'(x)| \leq q < 1$, kusjuures mida väiksem q , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi C nii, et $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$ oleks x^* lähedal võimalikult väike.

Võime valida igal iteratsioonisammul erineva C väärtuse. Kui x_{n-1} on leitud, siis valime C nii, et $g'(x_{n-1}) = 0$ ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi C suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x_{n-1}) = x_{n-1} + Cf(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Newtoni meetod

Vaatame võrrandit $f(x) = 0$. Hariliku iteratsioonimeetodi korral $x = g(x)$, kus $g(x) = x + Cf(x)$ (C on suvaline konstant).

Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et $|g'(x)| \leq q < 1$, kusjuures mida väiksem q , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi C nii, et $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$ oleks x^* lähedal võimalikult väike.

Võime valida igal iteratsioonisammul erineva C väärtuse. Kui x_{n-1} on leitud, siis valime C nii, et $g'(x_{n-1}) = 0$ ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi C suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x_{n-1}) = x_{n-1} + Cf(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Newtoni meetod

Vaatame võrrandit $f(x) = 0$. Hariliku iteratsioonimeetodi korral $x = g(x)$, kus $g(x) = x + Cf(x)$ (C on suvaline konstant).

Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et $|g'(x)| \leq q < 1$, kusjuures mida väiksem q , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi C nii, et $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$ oleks x^* lähedal võimalikult väike.

Võime valida igal iteratsioonisammul erineva C väärtuse. Kui x_{n-1} on leitud, siis valime C nii, et $g'(x_{n-1}) = 0$ ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi C suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x_{n-1}) = x_{n-1} + Cf(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Newtoni meetod

Vaatame võrrandit $f(x) = 0$. Hariliku iteratsioonimeetodi korral $x = g(x)$, kus $g(x) = x + Cf(x)$ (C on suvaline konstant).

Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et $|g'(x)| \leq q < 1$, kusjuures mida väiksem q , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi C nii, et $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$ oleks x^* lähedal võimalikult väike.

Võime valida igal iteratsioonisammul erineva C väärtuse. Kui x_{n-1} on leitud, siis valime C nii, et $g'(x_{n-1}) = 0$ ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi C suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x_{n-1}) = x_{n-1} + Cf(x_{n-1}) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

ja harilikku iteratsioonimeetodi eeskiri $x_n = g(x_{n-1})$ saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks**.

Newtoni meetod on ühesammuline meetod.

Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja alglähend x_0 peab olema otsitavale lahendile x^* piisavalt lähedal.

Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus γ sõltub konstandist K .

ja hariliku iteratsioonimeetodi eeskiri $x_n = g(x_{n-1})$ saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks**.

Newtoni meetod on ühesammuline meetod.

Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja alglähend x_0 peab olema otsitavale lahendile x^* piisavalt lähedal.

Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus γ sõltub konstandist K .

Näide Lahendame eelmise näite võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ Newtoni meetodiga.

Meil $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ja $f'(x) = 3x^2 + 2$.

Newtoni meetod n -nda lähendi leidmiseks on seega

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 + 2x_{n-1} - 1}{3x_{n-1}^2 + 2} = \frac{2x_{n-1}^3 + 1}{3x_{n-1}^2 + 2}$$

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 2} \approx 0,4545$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 + 1}{3x_1^2 + 2} \approx 0,4534$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 + 1}{3x_2^2 + 2} \approx 0,4534$$

Näide Lahendame eelmise näite võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ Newtoni meetodiga.

Meil $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ja $f'(x) = 3x^2 + 2$.

Newtoni meetod n -nda lähendi leidmiseks on seega

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 + 2x_{n-1} - 1}{3x_{n-1}^2 + 2} = \frac{2x_{n-1}^3 + 1}{3x_{n-1}^2 + 2}$$

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 2} \approx 0,4545$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 + 1}{3x_1^2 + 2} \approx 0,4534$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 + 1}{3x_2^2 + 2} \approx 0,4534$$

Näide Lahendame eelmise näite võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ Newtoni meetodiga.

Meil $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ja $f'(x) = 3x^2 + 2$.

Newtoni meetod n -nda lähendi leidmiseks on seega

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 + 2x_{n-1} - 1}{3x_{n-1}^2 + 2} = \frac{2x_{n-1}^3 + 1}{3x_{n-1}^2 + 2}$$

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 2} \approx 0,4545$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 + 1}{3x_1^2 + 2} \approx 0,4534$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 + 1}{3x_2^2 + 2} \approx 0,4534$$

Modifitseeritud Newtoni meetod

Newtoni meetodi korral

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Alati ei ole võimalik leida tuletise väärtust või on see protsess liiga töömahukas. Selle vältimiseks võib kasutada Newtoni meetodi modifikatsioone. Lihtsaim neist:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Eeskiri on **modifitseeritud Newtoni meetod**. Meetod on ühesammuline iteratsioonimeetod ning koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Modifitseeritud Newtoni meetod

Newtoni meetodi korral

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Alati ei ole võimalik leida tuletise väärtust või on see protsess liiga töömahukas. Selle vältimiseks võib kasutada Newtoni meetodi modifikatsioone. Lihtsaim neist:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Eeskiri on **modifitseeritud Newtoni meetod**. Meetod on ühesammuline iteratsioonimeetod ning koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Modifitseeritud Newtoni meetod

Newtoni meetodi korral

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Alati ei ole võimalik leida tuletise väärtust või on see protsess liiga töömahukas. Selle vältimiseks võib kasutada Newtoni meetodi modifikatsioone. Lihtsaim neist:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Eeskiri on **modifitseeritud Newtoni meetod**. Meetod on ühesammuline iteratsioonimeetod ning koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Lõikajate meetod

Teine võimalus Newtoni meetodit modifitseerida on tuletise lähendamine. Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kui Δx on väike, siis $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Argumendi muudule $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$ vastab funktsiooni muut $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$ ning

$$f'(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}.$$

Lõikajate meetod

Teine võimalus Newtoni meetodit modifitseerida on tuletise lähendamine. Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kui Δx on väike, siis $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Argumendi muudule $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$ vastab funktsiooni muut $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$ ning

$$f'(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}.$$

Lõikajate meetod

Teine võimalus Newtoni meetodit modifitseerida on tuletise lähendamine. Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kui Δx on väike, siis $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Argumendi muudule $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$ vastab funktsiooni muut $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$ ning

$$f'(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}.$$

Asendades leitud tuletise Newtoni meetodisse ning saame **lõikajate**
ehk kõõlude meetodi

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}).$$

Meetod on kaheammuline ja teatud eeldustel kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \beta |x_{n-1} - x^*|^{1,618},$$

kus $\beta > 0$.

Asendades leitud tuletise Newtoni meetodisse ning saame **lõikajate**
ehk kõõlude meetodi

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}).$$

Meetod on kaheammuline ja teatud eeldustel kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \beta |x_{n-1} - x^*|^{1,618},$$

kus $\beta > 0$.