Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{\alpha x} A_m(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m)$$

Lause

Kui arv α ei ole lin. homogeense võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) üks lahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.
Kui arv α on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s e^{\alpha x} P_m(x) =$$
$$= x^s e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{\alpha x} A_m(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m)$$

Lause

Kui arv α ei ole lin. homogeense võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) üks lahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.
Kui arv α on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s e^{\alpha x} P_m(x) =$$

$$= x^s e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{\alpha x} A_m(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m)$$

Lause

Kui arv α ei ole lin. homogeense võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) üks lahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.

Kui arv α on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s e^{\alpha x} P_m(x) =$$

$$= x^s e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{\alpha x} A_m(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m)$$

Lause

Kui arv α ei ole lin. homogeense võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) üks lahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.

Kui arv α on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s e^{\alpha x} P_m(x) =$$

$$= x^s e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.

B Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = A_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Lause

Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ei ole võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kus P_m, Q_n on sama astme polünoomid kui A_m, B_n.
Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub lahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s\left[P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

B Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = A_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Lause

Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ei ole võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kus P_m, Q_n on sama astme polünoomid kui A_m, B_n.
Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub lahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s\left[P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

B Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = A_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Lause

Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ei ole võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kus P_m, Q_n on sama astme polünoomid kui A_m, B_n.
Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub lahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s\left[P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

C Olgu $Ly = f(x)$, kus $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f_1(x)$ erilahend y_{*1} ning y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

C Olgu $Ly = f(x)$, kus $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f_1(x)$ erilahend y_{*1} ning y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

C Olgu $Ly = f(x)$, kus $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f_1(x)$ erilahend y_{*1} ning y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

C Olgu $Ly = f(x)$, kus $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f_1(x)$ erilahend y_{*1} ning y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.
Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.

Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.

Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \quad (3)$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.
Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.

Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:

1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;

2) esimeste integraalide abil;

3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

Süsteemi lahendiks

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{cases}$$

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

Süsteemi lahendiks

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{cases}$$

Definitsioon

Piirkonnas D määratud mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni

$$\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

nimetatakse normaalkujulise süsteemi (4) esimeseks integraaliks, kui muutujate $y_1, y_2, \dots, y_n$ *asendamisel süsteemi (4) mistahes lahendiga* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *muutub see funktsion konstantseks* x *suhtes:*

$$\psi(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \equiv C.$$

Definitsioon

Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) esimesed integraalid $\psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ *on sõltumatud, siis süsteemi (4) üldlahendiks ilmutamata kujul on*

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Definitsioon

Piirkonnas D määratud mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

nimetatakse normaalkujulise süsteemi (4) esimeseks integraaliks, kui muutujate $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *asendamisel süsteemi (4) mistahes lahendiga* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *muutub see funktsion konstantseks* x *suhtes:*

$$\psi(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \equiv C.$$

Definitsioon

Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) esimesed integraalid $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *on sõltumatud, siis süsteemi (4) üldlahendiks ilmutamata kujul on*

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln|y+z| - x = C_1 \\ \ln|y-z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z = C_3 e^{x} \\ y-z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^{x} + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^{x} - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln|y+z| - x = C_1 \\ \ln|y-z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z = C_3 e^x \\ y-z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^x + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^x - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln|y+z| - x = C_1 \\ \ln|y-z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = C_3 e^x \\ y - z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^x + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^x - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$