# Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

**Teoreem**

*Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ võrrandi $(3_h)$ lahendid. Siis*
***I** $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus $(a, b)$ parajasti siis, kui $W(x) \equiv 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.*
***II** $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus $(a, b)$ parajasti siis, kui $W(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.*

**Tõestus**

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

# Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

### Teoreem

*Olgu* $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $(3_h)$ *lahendid. Siis*
***I*** $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* $(a, b)$ *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.
***II*** $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* $(a, b)$ *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.

### Tõestus

**I** kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

# Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

### Teoreem

*Olgu* $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $(3_h)$ *lahendid. Siis*
***I*** $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* $(a, b)$ *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.
***II*** $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* $(a, b)$ *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.

### Tõestus

**I** kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*). Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

# Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

### Teoreem

*Olgu* $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $(3_h)$ *lahendid. Siis*
***I*** $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* $(a, b)$ *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.
***II*** $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* $(a, b)$ *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.

### Tõestus

**I** kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Saadud seost diferentseerides saame

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(k)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(k)}(x)].$$

Kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)] \\ y_1'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1'(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}'(x)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x)] \end{vmatrix} =$$

Saadud seost diferentseerides saame

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(k)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(k)}(x)].$$

Kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_{n-1}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)] \\ y_1'(x) & ... & y_{n-1}'(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1'(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}'(x)] \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x)] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & 0 \\ y_1'(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**II** Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b) : \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi $\alpha_i -$de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & 0 \\ y_1'(x) & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**II** Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud.
Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b) : \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi $\alpha_i-$de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$
= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & 0 \\ y_1'(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.
$$

**II** Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b): \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi $\alpha_i -$de suhtes.

$$
\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}
$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & 0 \\ y_1'(x) & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**II** Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b): \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi $\alpha_i -$de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest $\alpha_i$ on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \dots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest $\alpha_i$ on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \dots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest $\alpha_i$ on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, ..., \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi $(3_h)$ lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi $(3_h)$ lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi $(3_h)$ lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi $(3_h)$ lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi $(3_h)$ lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi $(3_h)$ lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus $(a, b)$. Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

**Märkus:** Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus $(a, b)$. Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

**Märkus:** Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus $(a, b)$. Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

**Märkus:** Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus $(a, b)$. Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

**Märkus:** Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

### Järeldus

*Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi* $(3_h)$ *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
*1)* $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* $(a, b)$;
*2)* $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$;
*3) leidub* $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) = 0$.

### Järeldus

*Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi* $(3_h)$ *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
*1)* $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* $(a, b)$;
*2)* $W(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$;
*3)leidub* $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

## Järeldus

*Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi* $(3_h)$ *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
*1)* $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* $(a, b)$;
*2)* $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$;
*3) leidub* $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) = 0$.

## Järeldus

*Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi* $(3_h)$ *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
*1)* $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* $(a, b)$;
*2)* $W(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$;
*3)leidub* $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

### Järeldus

*Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi* $(3_h)$ *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on kas* $W(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b)$ *korral või* $W(x) \neq 0$ *kõigi* $x \in (a, b)$.

# Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

**Definitsioon**

*Võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.*

**Teoreem**

*Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ on pidevad funktsioonid vahemikus $(a, b)$, siis leidub võrrandi $Ly = 0$ jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

**Tõestus**

*Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ ning lisame erinevaid algtingimusi.*

# Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

### Definitsioon

*Võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.*

### Teoreem

*Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ on pidevad funktsioonid vahemikus $(a, b)$, siis leidub võrrandi $Ly = 0$ jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

### Tõestus

*Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ ning lisame erinevaid algtingimusi.*

# Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

### Definitsioon

*Võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

### Teoreem

*Kui kordajad* $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* $(a, b)$, *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

### Tõestus

*Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks* $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

# Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

### Definitsioon

*Võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

### Teoreem

*Kui kordajad* $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* $(a, b)$, *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

### Tõestus

*Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks* $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

# Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

**Definitsioon**

*Võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.*

**Teoreem**

*Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ on pidevad funktsioonid vahemikus $(a, b)$, siis leidub võrrandi $Ly = 0$ jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

**Tõestus**

*Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ ning lisame erinevaid algtingimusi.*

Olgu siis esimene ülesanne

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

kus $x_0 \in (a, b)$. Teine Cauchy ülesanne:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Olgu siis esimene ülesanne

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

kus $x_0 \in (a, b)$. Teine Cauchy ülesanne:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ $n$ lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ $n$ lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ $n$ lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ $n$ lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ $n$ lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ $n$ lahendit $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Kuna Wronski determinant on nullist erinev, siis on funktsioonid lineaarselt sõltumatud ja moodustavad LFS.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Kuna Wronski determinant on nullist erinev, siis on funktsioonid lineaarselt sõltumatud ja moodustavad LFS.

### Teoreem

*Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem, siis selle võrrandi üldlahend avaldub kujul $y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$.*

### Teoreem

*Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem, $y_*(x)$ võrrandi $Ly = f(x)$ üks lahend, siis võrrandi $Ly = f(x)$ üldlahend on kujul $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y_*(x)$.*

### Teoreem

*Olgu* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteem, siis selle võrrandi üldlahend avaldub kujul* $y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$.

### Teoreem

*Olgu* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteem,* $y_*(x)$ *võrrandi* $Ly = f(x)$ *üks lahend, siis võrrandi* $Ly = f(x)$ *üldlahend on kujul* $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y_*(x)$.

### Tõestus

*Omaduse 2 põhjal saame öelda, et*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$$

*on $Ly = f(x)$ lahend. Nüüd on vaja veel veenduda, et mistahes $x_0 \in (a, b)$ ja mistahes $y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)}$ korral leiduvad konstandid $C_1, C_2, ..., C_n$ nii, et funktsioon $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ rahuldab algtingimusi*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

## Tõestus

*Omaduse 2 põhjal saame öelda, et*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$$

*on* $Ly = f(x)$ *lahend. Nüüd on vaja veel veenduda, et mistahes* $x_0 \in (a, b)$ *ja mistahes* $y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)}$ *korral leiduvad konstandid* $C_1, C_2, ..., C_n$ *nii, et funktsioon* $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ *rahuldab algtingimusi*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures $y_*$ viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \dots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures $y_*$ viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures $y_*$ viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ ... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$.
Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures $y_*$ viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ ... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.
**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$.
Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.
**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.
**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:
1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.
2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.
3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.
**KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:
1) leiame $Ly = 0$ $n$ lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.
2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi $y_*$.
3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

# Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime $y_*$ kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud $y_*$ oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on $n$ tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

# Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.

Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime $y_*$ kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud $y_*$ oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on $n$ tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

# Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime $y_*$ kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud $y_*$ oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on $n$ tundmatu määramiseks vaja veel leida $n-1$ tingimust. Võime need ise valida.

# Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime $y_*$ kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud $y_*$ oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on $n$ tundmatu määramiseks vaja veel leida $n-1$ tingimust. Võime need ise valida.

# Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime $y_*$ kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud $y_*$ oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on $n$ tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

# Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime $y_*$ kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud $y_*$ oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on $n$ tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Diferentseerime $y_*$ avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime $y_*$ avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime $y_*$ avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime $y_*$ avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime $y_*$ avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud $y_*$ tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud $y_*$ tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud $y_*$ tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)]$$

$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud $y_*$ tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] +$$
$$C_1(x)[p_0(x)y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_1] + ... +$$
$$+C_n(x)[p_0(x)y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_n] = f(x)$$

Seega

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] = f(x)$$

Siit

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] +$$
$$C_1(x)[p_0(x)y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_1] + ... +$$
$$+C_n(x)[p_0(x)y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_n] = f(x)$$

Seega

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] = f(x)$$

Siit

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

# II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla linaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.

Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi. Uue lahendi $y_2$ saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

# II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla linaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.

Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi. Uue lahendi $y_2$ saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

# II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla linaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.
Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi.
Uue lahendi $y_2$ saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.

Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.

Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$, $C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

**Näide:** Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on $e^x$.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks $e^{-x}$. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd $y_*$ :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks $e^{-x}$. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd $y_*$ :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks $e^{-x}$. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd $y_*$ :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks $e^{-x}$. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd $y_*$ :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks $e^{-x}$. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd $y_*$ :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks $e^{-x}$. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd $y_*$ :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks $e^{-x}$. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd $y_*$ :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks $e^{-x}$. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd $y_*$ :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks $e^{-x}$. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd $y_*$ :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^{x}$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^x dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^x$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x} \cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x\cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^x dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^x$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x} \cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$$