

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : a < x < b, \alpha < y < \beta\}.$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : a < x < b, \alpha < y < \beta\}.$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : a < x < b, \alpha < y < \beta\}.$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : a < x < b, \alpha < y < \beta\}.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D. \quad (2)$$

Tarvilikkus (1) $\Rightarrow$ (2).

Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x, y) : \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D. \quad (2)$$

Tarvilikkus (1) $\Rightarrow$ (2).

Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x, y) : \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D. \quad (2)$$

Tarvilikkus (1) $\Rightarrow$ (2).

Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x, y) : \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D. \quad (2)$$

Tarvilikkus (1) $\Rightarrow$ (2).

Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x, y) : \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D. \quad (2)$$

Tarvilikkus (1) $\Rightarrow$ (2).

Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x, y) : \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D. \quad (2)$$

Tarvilikkus (1) $\Rightarrow$ (2).

Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x, y) : \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest jäeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2) $\Rightarrow$ (1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y) dx + C(y) \right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y) dx + C(y) \right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y) dx + C(y) \right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y) dx + C(y) \right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu x -st. Tõepoolest

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Et ϕ ei sõltu x -st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu x -st. Tõepoolest

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Et ϕ ei sõltu x -st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu x -st. Tõepoolest

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Et ϕ ei sõltu x -st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu x -st. Tõepoolest

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Et ϕ ei sõltu x -st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu x -st. Tõepoolest

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Et ϕ ei sõltu x -st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu x -st. Tõepoolest

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Et ϕ ei sõltu x -st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

$$C(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C_1$$

Seega

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C_1.$$

Tarvilik ja piisav tingimus on tõestatud.

$$C(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C_1$$

Seega

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C_1.$$

Tarvilik ja piisav tingimus on tõestatud.

Võimalikke lahendusviise on kolm:

1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.

Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.

2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.

3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:

1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.

Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.

2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.

3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:

1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.

Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.

2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.

3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:

1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.

Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.

2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.

3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:

1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.

Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.

2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.

3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:

1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.

Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.

2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.

3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0$$

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x, y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x, y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x, y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x, y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x .

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.

Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x .

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.

Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x .

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.

Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suuruselt x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x .

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.

Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suuruselt y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x .

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.

Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N \right) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M \right)} d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N \right) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M \right)} d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N \right) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M \right)} d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N \right) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M \right)} d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N \right) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M \right)} d\omega$$

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω .

Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks vöörlahendeid.

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω .

Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks vöörlahendeid.

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω .

Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks vöörlahendeid.