

Viite arvutamine ja optimeerimine

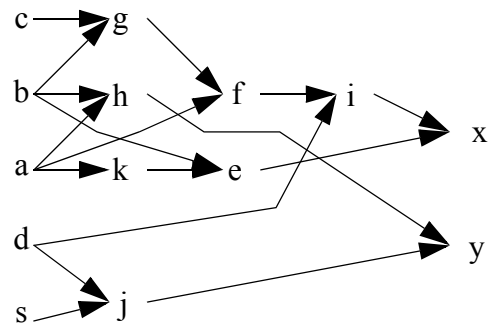
Esimene näide

Antud on järgmine funktsioonide süsteem: $k = \bar{a}$; $e = k + b$; $g = \overline{(b + c)}$; $f = a g$; $h = a b$; $i = f \oplus d$; $j = d + s$; $x = e \oplus i$; $y = j + h$. Sisendid: a, b, c, d, s . Väljundid: x, y . Viited: “invertor”, “ja” ja “või” – 1 ajaühik, ülejäänud – 2 ajaühikut. Teada on veel ka andmete valmisolekute ajad sisendites – $t_a = t_b = t_c = t_d = 0$ ja $t_s = 4$, ning nõutavad andmete valmisolekuajad väljundites – $\bar{t}_x = \bar{t}_y = 7$. Leida tuleb:

- 1) andmete valmisolekuajad väljundites,
- 2) ajaline sobivus sisendites (slack) ja
- 3) topoloogiline kriitiline tee.

1) Andmete valmisolekuajad väljundites

Andmete valmisolekuage sõlmes leitakse kui $t_i = d_i + \max_{j|(j,i) \in E} t_j$ (suurim valmisolekuageadest allikate väljundites). Teada on valmisolekuajad sisendites – $t_a=0, t_b=0, t_c=0, t_d=0, t_s=4$; sõlmede viited – $d_a=0, d_b=0, d_c=0, d_d=0, d_s=0, d_k=1, d_e=1, d_g=2, d_f=1, d_h=1, d_i=2, d_j=1, d_x=2, d_y=1$ ja ühendused – $E = \{(a,k), (k,e), (b,e), (b,g), (c,g), (a,f), (g,f), (a,h), (b,h), (f,i), (d,i), (d,j), (s,j), (e,x), (i,x), (j,y), (h,y)\}$.



$$\begin{aligned}
 t_a=0, t_b=0, t_c=0, t_d=0, t_s=4 & \text{ – antud;} & t_g = d_g + \max(t_b, t_c) = 2 + \max(0,0) = 2; \\
 t_h = d_h + \max(t_a, t_b) = 1 + \max(0,0) = 1; & t_k = d_k + \max(t_a) = 1 + \max(0) = 1; \\
 t_j = d_j + \max(t_d, t_s) = 1 + \max(0,4) = 5; & t_f = d_f + \max(t_a, t_g) = 1 + \max(0,2) = 3; \\
 t_e = d_e + \max(t_b, t_k) = 1 + \max(0,1) = 2; & t_i = d_i + \max(t_d, t_f) = 2 + \max(0,3) = 5; \\
 t_x = d_x + \max(t_e, t_i) = 2 + \max(2,5) = 7; & t_y = d_y + \max(t_h, t_j) = 1 + \max(1,5) = 6;
 \end{aligned}$$

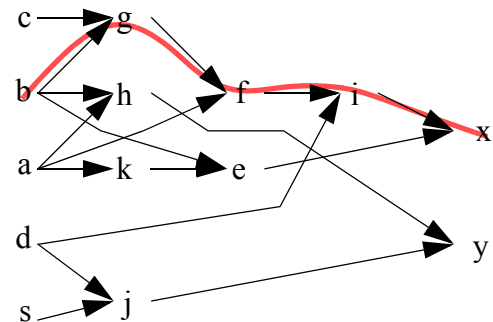
2) Ajaline sobivus (slack) sisendites leitakse kui $s_i = \bar{t}_i - t_i$. Selleks on vaja teada nii andmete valmisolekuagega kui ka nõutavat andmete valmisolekuage sisendites. Valmisolekuajad on juba olemas ja nõutavad ajad arvutatakse iga sõlme jaoks kui $\bar{t}_i = \min_{j|(i,j) \in E} (\bar{t}_j - d_j)$ (vähim nõutavatest valmisolekuageadest tarbijate sisendites). Teada on valmisolekuajad sisendites – $t_a=0, t_b=0, t_c=0, t_d=0, t_s=4$; nõutavad andmete valmisolekuajad väljundites – $\bar{t}_x=0; \bar{t}_y=7$; sõlmede viited – $d_a=0, d_b=0, d_c=0, d_d=0, d_s=0, d_k=1, d_e=1, d_g=2, d_f=1, d_h=1, d_i=2, d_j=1, d_x=2, d_y=1$ ja ühendused – $E = \{(a,k), (k,e), (b,e), (b,g), (c,g), (a,f), (g,f), (a,h), (b,h), (f,i), (d,i), (d,j), (s,j), (e,x), (i,x), (j,y), (h,y)\}$.

$$\begin{aligned}
\bar{t}_x &= \bar{t}_y = 7 - \text{antud}; & \bar{t}_j &= \min(\bar{t}_y - d_y) = \min(7 - 1) = 6; \\
\bar{t}_i &= \min(\bar{t}_x - d_x) = \min(7 - 2) = 5; & \bar{t}_h &= \min(\bar{t}_y - d_y) = \min(7 - 1) = 6; \\
\bar{t}_f &= \min(\bar{t}_i - d_i) = \min(5 - 2) = 3; & \bar{t}_g &= \min(\bar{t}_f - d_f) = \min(3 - 1) = 2; \\
\bar{t}_e &= \min(\bar{t}_x - d_x) = \min(7 - 2) = 5; & \bar{t}_k &= \min(\bar{t}_e - d_e) = \min(5 - 1) = 4; \\
\bar{t}_a &= \min(\bar{t}_k - d_k, \bar{t}_f - d_f, \bar{t}_h - d_h) = \min(4 - 1, 3 - 1, 6 - 1) = 2; & s_a &= \bar{t}_a - t_a = 2 - 0 = 2; \\
\bar{t}_b &= \min(\bar{t}_e - d_e, \bar{t}_g - d_g, \bar{t}_h - d_h) = \min(5 - 1, \underline{2 - 2}, 6 - 1) = 0; & s_b &= \bar{t}_b - t_b = 0 - 0 = 0; \\
\bar{t}_c &= \min(\bar{t}_g - d_g) = \min(\underline{2 - 2}) = 0; & s_c &= \bar{t}_c - t_c = 0 - 0 = 0; \\
\bar{t}_d &= \min(\bar{t}_i - d_i, \bar{t}_j - d_j) = \min(5 - 2, 6 - 1) = 3; & s_d &= \bar{t}_d - t_d = 3 - 0 = 3; \\
\bar{t}_s &= \min(\bar{t}_j - d_j) = \min(6 - 1) = 5; & s_s &= \bar{t}_s - t_s = 5 - 4 = 1.
\end{aligned}$$

Sobivus sisendites on kõikjal positiivne - viited ja ajastus on korras.

3) Topoloogilise kriitilise tee leidmiseks on vaja teada kõikide ajaliste sobivust (slack'i), mille arvutamiseks on omakorda vaja teada sõlmede andmete valmisolekuaega ja nõutavat valmisolekuaega (leitud eelmistes alamülesannetes). Sisendite sobivused on juba teada, vaja on arvutada ülejäänud sõlmede sobivused.

$$\begin{aligned}
s_a &= \bar{t}_a - t_a = 2 - 0 = 2; & s_b &= \bar{t}_b - t_b = 0 - 0 = 0; \\
s_c &= \bar{t}_c - t_c = 0 - 0 = 0; & s_d &= \bar{t}_d - t_d = 3 - 0 = 3; \\
s_s &= \bar{t}_s - t_s = 5 - 4 = 1; & s_e &= \bar{t}_e - t_e = 5 - 2 = 3; \\
s_f &= \bar{t}_f - t_f = 3 - 3 = 0; & s_g &= \bar{t}_g - t_g = 2 - 2 = 0; \\
s_h &= \bar{t}_h - t_h = 6 - 1 = 5; & s_i &= \bar{t}_i - t_i = 5 - 5 = 0; \\
s_j &= \bar{t}_j - t_j = 6 - 5 = 1; & s_k &= \bar{t}_k - t_k = 4 - 1 = 3; \\
s_x &= \bar{t}_x - t_x = 7 - 7 = 0; & s_y &= \bar{t}_y - t_y = 7 - 6 = 1.
\end{aligned}$$



Kriitilise tee moodustavad sõlmed, mille sobivus on kõige väiksem (ja see sobivus on kogu tee ulatuses sama). Antud juhul on kriitiliseks teeks “b-g-f-i-x” ja/või “c-g-f-i-x”.

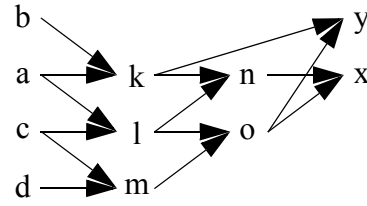
Teine näide

Antud on järgmine funktsioonide süsteem: $k = a b$; $l = a \oplus c$; $m = c d$; $n = \overline{k + l}$; $o = l \oplus m$; $x = n + o$; $y = \overline{k o}$. Sisendid: a, b, c, d. Väljundid: x, y. Elementide viited: sisendid – $d_a = d_b = d_c = d_d = 0$; lihtsamad elemendid – $d_k = d_m = d_n = d_x = d_y = 1$; xor/xnor – $d_l = d_o = 2$. Teada on veel ka andmete valmisolekute ajad sisendites – $t_a = t_c = 1$ ja $t_b = t_d = 0$, ning nõutavad andmete valmisolekuajad väljundites – $\bar{t}_x = \bar{t}_y = 7$. Leida tuleb:

- 1) andmete valmisolekuajad väljundites,
- 2) ajaline sobivus sisendites (slack) ja
- 3) topoloogiline kriitiline tee.

1) Andmete valmisolekuajad väljundites

Arvutamise aluseks endisel $t_i = d_j + \max_{j|(j,i) \in E} t_j$ (suurim valmisolekuaegadest allikate väljundites).
Teada on valmisolekuajad sisendites – $t_a=1, t_b=0, t_c=1, t_d=0$; sõlmede viited – $d_a=0, d_b=0, d_c=0, d_d=0, d_k=1, d_l=2, d_m=1, d_n=1, d_o=2, d_x=1, d_y=1$ ja ühendused – $E=\{(a,k),(b,k),(a,l),(c,l),(c,m),(d,m),(k,n),(l,n),(l,o),(m,o),(n,x),(o,x),(k,y),(o,y)\}$.



$$\begin{aligned}
 t_a=1, t_b=0, t_c=1, t_d=0 & \text{ – antud;} & t_k &= d_k + \max(t_a, t_b) = 1 + \max(1, 0) = 2; \\
 t_l &= d_l + \max(t_a, t_c) = 2 + \max(1, 1) = 3; & t_m &= d_m + \max(t_c, t_d) = 1 + \max(1, 0) = 2; \\
 t_n &= d_n + \max(t_k, t_l) = 1 + \max(2, 3) = 4; & t_o &= d_o + \max(t_l, t_m) = 2 + \max(3, 2) = 5; \\
 t_x &= d_x + \max(t_n, t_o) = 1 + \max(4, 5) = 6; & t_y &= d_y + \max(t_k, t_o) = 1 + \max(2, 5) = 6;
 \end{aligned}$$

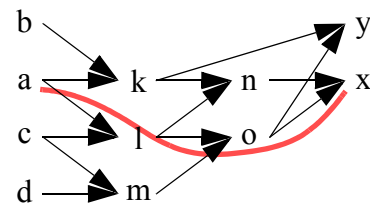
2) Ajaline sobivus (slack) sisendites leitakse kui $s_i = \bar{t}_i - t_i$. Selleks on vaja teada nii andmete valmisolekuaega kui ka nõutavat andmete valmisolekuaeg sisendites. Viimase arvutamise aluseks endisel $\bar{t}_i = \min_{j|(i,j) \in E} (\bar{t}_j - d_j)$ (vähim nõutavatest valmisolekuaegadest tarbijate sisendites). Teada on valmisolekuajad sisendites – $t_a=1, t_b=0, t_c=1, t_d=0$; nõutavad andmete valmisolekuajad väljundites – $\bar{t}_x=0, \bar{t}_y=7$; sõlmede viited – $d_a=0, d_b=0, d_c=0, d_d=0, d_k=1, d_l=2, d_m=1, d_n=1, d_o=2, d_x=1, d_y=1$ ja ühendused – $E=\{(a,k),(b,k),(a,l),(c,l),(c,m),(d,m),(k,n),(l,n),(l,o),(m,o),(n,x),(o,x),(k,y),(o,y)\}$.

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_x &= \bar{t}_y = 7 \text{ – antud;} & \bar{t}_o &= \min(\bar{t}_x - d_x, \bar{t}_y - d_y) = \min(7 - 1, 7 - 1) = 6; \\
 \bar{t}_n &= \min(\bar{t}_x - d_x) = \min(7 - 1) = 6; & \bar{t}_m &= \min(\bar{t}_o - d_o) = \min(6 - 2) = 4; \\
 \bar{t}_l &= \min(\bar{t}_n - d_n, \bar{t}_o - d_o) = \min(6 - 1, 6 - 2) = 4; & \bar{t}_k &= \min(\bar{t}_y - d_y, \bar{t}_n - d_n) = \min(7 - 1, 6 - 1) = 5; \\
 \bar{t}_a &= \min(\bar{t}_k - d_k, \bar{t}_l - d_l) = \min(5 - 1, 4 - 2) = 2; & s_a &= \bar{t}_a - t_a = 2 - 1 = 1; \\
 \bar{t}_b &= \min(\bar{t}_k - d_k) = \min(5 - 1) = 4; & s_b &= \bar{t}_b - t_b = 4 - 0 = 4; \\
 \bar{t}_c &= \min(\bar{t}_l - d_l, \bar{t}_m - d_m) = \min(4 - 2, 4 - 1) = 2; & s_c &= \bar{t}_c - t_c = 2 - 1 = 1; \\
 \bar{t}_d &= \min(\bar{t}_m - d_m) = \min(4 - 1) = 3; & s_d &= \bar{t}_d - t_d = 3 - 0 = 3.
 \end{aligned}$$

Sobivus sisendites on kõikjal positiivne - viited ja ajastus on korras.

3) Topoloogilise kriitilise tee leidmiseks on vaja teada kõikide ajalast sobivust (slack'i), mille arvutamiseks on omakorda vaja teada sõlmede andmete valmisolekuaega ja nõutavat valmisolekuaega (leitud eelmistes alamülesannetes). Sisendite sobivused on juba teada, vaja on arvutada ülejäänud sõlmede sobivused.

$$\begin{aligned}
 s_a &= \bar{t}_a - t_a = 2 - 1 = 1; & s_b &= \bar{t}_b - t_b = 4 - 0 = 4; \\
 s_c &= \bar{t}_c - t_c = 2 - 1 = 1; & s_d &= \bar{t}_d - t_d = 3 - 0 = 3; \\
 s_k &= \bar{t}_k - t_k = 5 - 2 = 3; & s_l &= \bar{t}_l - t_l = 4 - 3 = 1; \\
 s_m &= \bar{t}_m - t_m = 4 - 2 = 2; & s_n &= \bar{t}_n - t_n = 6 - 4 = 2; \\
 s_o &= \bar{t}_o - t_o = 6 - 5 = 1; & & \\
 s_x &= \bar{t}_x - t_x = 7 - 6 = 1; & s_y &= \bar{t}_y - t_y = 7 - 6 = 1.
 \end{aligned}$$



Kriitilise tee moodustavad sõlmed, mille sobivus on kõige väiksem (ja see sobivus on kogu tee ulatuses sama). Antud juhul on kriitiliseks teeks “a-l-o-x”, “c-l-o-x”, “a-l-o-y” ja/või “c-l-o-y”.

Kolmas näide – skeemi (viite) optimeerimine

Tegemist on näitega, mis on pärit ühe kodutöö variandi analüüsist (vt. 5. loengu materjale). Paremalt on toodud lähteülesandele vastav tõeväärtustabel. Minimeerimise tulemusena (espresso) saadi järgmine süsteem:

$$k = \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}d + b\bar{d} + abc; \quad l = a\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}d + abc + b\bar{c};$$

$$m = \bar{a}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}d + abc + b\bar{c} \quad \text{ja} \quad n = \bar{a}c\bar{d} + a\bar{c}d + b\bar{d} + abc + b\bar{c}.$$

abcd	klmn
0000	-00-
0001	1--0
0010	-0-1
0011	111-
0100	0-1-
0101	-1--
0110	0011
0111	1-01
1000	1000
1001	11-1
1010	-000
1011	0000
1100	0111
1101	-111
1110	11-1
1111	1-11

Pärast ühiste alamavaldiste leidmist, nende eraldamist ja teisendamist sobiva suurustega teheteks (kasutada on ju kuni 3 sisendiga loogikaelemendid), saadi:

$$t1 = a + \bar{c}; \quad k1 = \bar{b}\bar{c} + b\bar{d}; \quad k = k1 + \bar{a}\bar{b}d + abc; \quad l = t1b + a\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}d;$$

$$m = t1b + \bar{a}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}d; \quad n1 = t1b + b\bar{d} \quad \text{ja} \quad n = n1 + \bar{a}c\bar{d} + a\bar{c}d.$$

Viite (ja kriitilise tee) arvutamine on antud näites lihtsam, sest kõikide sisendite andmete valmisolekuajad on 0 ja väljundite nõutavat andmete valmisolekuaegu pole antud. Seega piisab ainult valmisolekuaegade (t_i) arvutamisest. Loogikaelementide viited on järgmised – 2-NAND - 1.0; NOT, 2-NOR, 3-NAND - 1.5; 2-OR, 2-AND, 2-XOR, 3-NOR - 2.0 ja 3-OR, 3-AND, 3-XOR - 2.5.

Kirjutades välja üksikud loogikaelemendid koos viidete/hilistumiste (andmete valmisoleku aegade) arvutamisega, on tulemuseks:

$a_i = \bar{a};$	$t_{a_i} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$b_i = \bar{b};$	$t_{b_i} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$c_i = \bar{c};$	$t_{c_i} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$d_i = \bar{d};$	$t_{d_i} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$t1 = a + c_i;$	$t_{t1} = \max(0, 1.5) + 2.0 = 3.5$
$t2 = b_i c_i;$	$t_{t2} = \max(1.5, 1.5) + 2.0 = 3.5$
$t3 = b\bar{d};$	$t_{t3} = \max(0, 0) + 2.0 = 2.0$
$t4 = a_i b_i d;$	$t_{t4} = \max(1.5, 1.5, 0) + 2.5 = 4.0$
$t5 = abc;$	$t_{t5} = \max(0, 0, 0) + 2.5 = 2.5$
$t6 = t1b;$	$t_{t6} = \max(3.5, 0) + 2.0 = 5.5$
$t7 = aci d;$	$t_{t7} = \max(0, 1.5, 0) + 2.5 = 4.0$
$t8 = a_i c d_i;$	$t_{t8} = \max(1.5, 0, 1.5) + 2.5 = 4.0$
$k1 = t2 + t3;$	$t_{k1} = \max(3.5, 2.0) + 2.0 = 5.5$
$k = k1 + t4 + t5;$	$t_k = \max(5.5, 4.0, 2.5) + 2.5 = 8.0$
$l = t6 + t7 + t4;$	$t_l = \max(5.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 8.0$
$m = t6 + t8 + t4;$	$t_m = \max(5.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 8.0$
$n1 = t6 + t3;$	$t_{n1} = \max(5.5, 2.0) + 2.0 = 7.5$
$n = n1 + t8 + t7;$	$t_n = \max(7.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 10.0$

Kriitiliseks teeks osutub antud juhul kõige pikema viitega tee, mis oleks siis “c-ci-t1-t6-n1-n” (sisendite suurimad viited/hilistumised alla joonitud).

Kuna hilistumine on kriitlisel teel 20% teistest suurem, siis oleks kasulik uurida, kas seda ei saaks vähendada (ilma keerukate teisendusteta NAND/NOR elementideks, mis samuti annaksid parema tulemuse). Selleks tuleks analüüsida, kuidas viide antud teel kujuneb. Esimese osa muutmine nõuaks teisendusi, lisaks sõltuvad ka osa teisi väljundeid *ci*-st, *t1*-st ja *t6*-st. Jääb üle ainult uurida, kuidas *n* leitakse. Kuna *n* sõltub neljast implikandist, siis peab nende kokku võtmiseks kasutama kahte OR elementi – 2-OR ja 3-OR. Üldvariante on sisuliselt kaks – $n1 = tx1 + tx2$; $n = n1 + tx3 + tx4$; või $n1 = tx1 + tx2 + tx3$; $n = n1 + tx4$; ($tx1$ - $tx4$ tähistaksid implikante $t3$, $t6$, $t7$ ja $t8$ suvalises järjekorras). Piisavalt hea (parima?) tulemuse leidmiseks peaks ka arvestama implikantide andmete valmisolekuaegadega – mida hilisem aeg (suurem viide), seda ligemal väljundile oleva OR-le peaks ta ühendama. Implikantide andmete valmisolekuajad on järgmised – $t_{t3}=2.0$, $t_{t6}=5.5$, $t_{t7}=4.0$ ja $t_{t8}=4.0$. Ja selgubki, et $t6$ on vales kohas – $t6$ peaks olema mitte $n1$ vaid hoopis n sisendiks. See, kas $t7$ (või $t8$, mis on sama hilistumisega) panna $n1$ või n sisendiks, annaski kaks varianti, mida võrrelda ($t3$ peaks kindlasti olema $n1$ sisendiks, sest hilistumine on väike).

Esimene variant – 2-OR->3-OR (ainult $n1$ ja n on muudetud):

$$\begin{aligned} n1 &= t3 + t7 ; & t_{n1} &= \max(2.0, 4.0) + 2.0 = \underline{6.0} \\ n &= n1 + t6 + t8 ; & t_n &= \max(\underline{6.0}, 5.5, 4.0) + 2.5 = \underline{8.5} \end{aligned}$$

Teine variant – 3-OR->2-OR:

$$\begin{aligned} n1 &= t3 + t7 + t8 ; & t_{n1} &= \max(2.0, 4.0, 4.0) + 2.5 = \underline{6.5} \\ n &= n1 + t6 ; & t_n &= \max(\underline{6.5}, 5.5) + 2.0 = \underline{8.5} \end{aligned}$$

Mõlemal juhul on tulemus sisuliselt sama – väljudi n hilistumine paranes 10.0-lt 8.5-le (kõik väljundid on suhteliselt sarnase hilistumisega). Oluline muutus on see, et ahel “c-ci-t1-t6” ei asu enam kriitlisel teel. Selle asemel on seal kas “c-ci-t7”, “a-ai-t8” või “d-di-t8” ja edasine viite vähendamine eeldaks juba teisendusi, mis asendaksid AND ja OR elemendid NAND ja NOR (ja teiste) kombinatsioonidega.

Sarnane olukord on ka väljundis k ($k1=t2+t3$; $k=k1+t4+t5$), kus võib ära vahetada implikandid $t2$ ja $t5$. Tulemuseks oleks viite vähenemine 1 ajahüliku võrra (oli 8.0, uus on 7.0):

$$\begin{aligned} k1 &= t5 + t3 ; & t_{k1} &= \max(\underline{2.5}, 2.0) + 2.0 = 4.5 \\ k &= k1 + t4 + t2 ; & t_k &= \max(\underline{4.5}, 4.0, 3.5) + 2.5 = 7.0 \end{aligned}$$

Erinevalt väljundist n pole k puhul 3-OR->2-OR paari kasutamine otstarbekas. Selle kontrollimine jääb iseseisvaks tööks.