Loogikafunktsioonide süsteemi täpne ja heuristiline minimeerimine

1. Loogikafunktsioonide süsteem

- Kombinatsioonskeemi “musta kasti” mudel
- Defineeritud Boole’i algebra baasil – (B,+,*,~), B={0,1}
- Loogikafunktsioonid võivad olla
  mitme väljundiga (funktsioonide süsteem) – $f : B^n \to B$ ja $f : B^n \to B^m$
  osaliselt (mittetäielikult) määratud – $f : B^n \to \{0,1,\text{-}\}^m$ (ka f:$B^n \to \{0,1,*\}^m$)
  sõltub funktsiooni kasutamisest, nt. võimatud sisendkombinatsioonid
- Funktsioonide süsteemis on defineeritud iga komponendi jaoks:
  ON-set – F_f – selline funktsiooni määramispiirkonna osa, kus f on tõene
  OFF-set – R_f – selline funktsiooni määramispiirkonna osa, kus f on väär
  DC-set – D_f – selline funktsiooni määramispiirkonna osa, kus f on määramata (pole oluline)

2. Normaalkujud

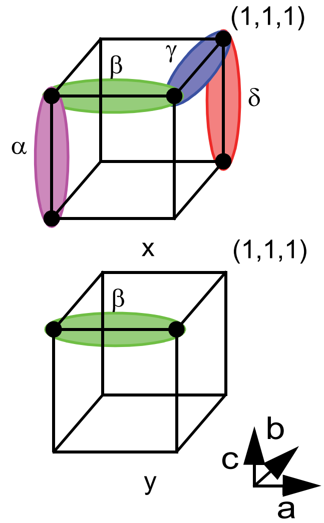
Kanoonilised standardsed esitusvalemid – normaalkujud
- Disjunktiivne normaalkuju (DNK, DNF) – elemantaarkonjunktsioonide disjunktsioon
  Elemantaarkonjunktsioon koosneb argumentide ja/või nende inversioonide konjunktsioonist
- Konjunktiivne normaalkuju (KNK, CNF) – elemantaardisjunktsioonide konjunktsioon
  Elemantaardisjunktsioon koosneb argumentide ja/või nende inversioonide disjunktsioonist

Iga funktsioon on esitatav DNK ja KNK kujul, kuid mitte üheselt
- Täielik DNK (TDNK, CDNF) – iga elemantaarkonjunktsiooni pikkus on n
  (st. iga elementaarkonjunktsioon sisaldab funktsiooni kõiki argumente)
- Täielik KNK (TKNK, CCNF) – iga elemantaardisjunktsiooni pikkus on n
  (st. iga elementaardisjunktsioon sisaldab funktsiooni kõiki argumente)

Igal funktsioonil on täpselt üks TDNK ja üks TKNK

3. Definitsioonid ja esitusviisid

- *muutuja* (variable)
- *literaal* (literal) ehk
  algterm – muutuja ja selle täiend
- *korrutis* (product) ehk *kuup* (cube)
  ehk *elementaarkonjuktsioon* –
  literaalide korrutis
- *implikant* (implicant) ehk intervall –
  funktsiooni väärtust (tavaliselt 1)
  määrav konjunktsioon
- *hüperkuup* (hypercube)
- *minterm* – kõiki sisendmuutujaid
  sisaldav implikant (sõlm hüperkuubis)
- *tõeväärtustabel* (truth table)



hüper-kuup

abc	xy
000	10
001	11
101	11
110	10
111	10

tõeväärtus-tabel

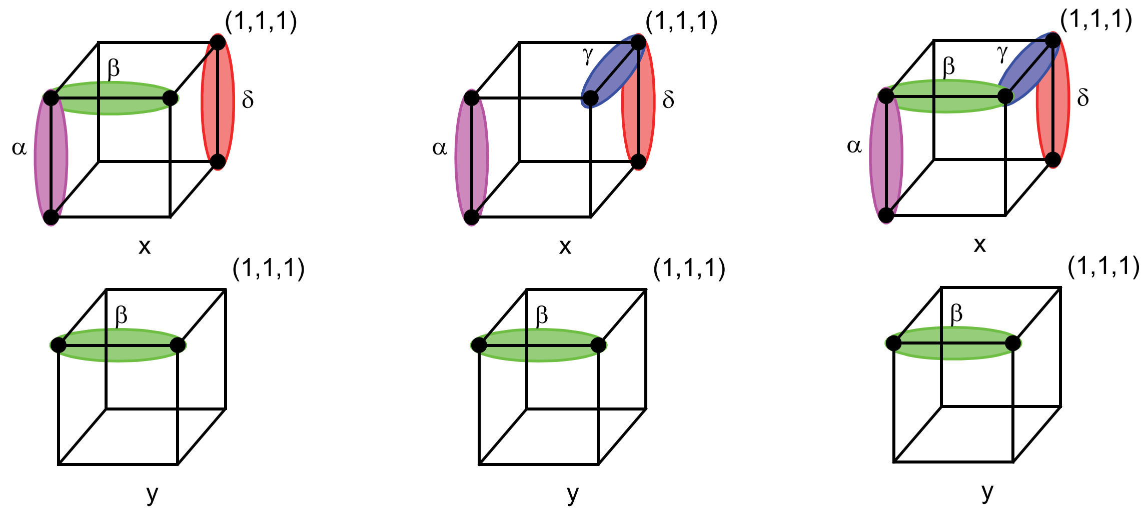
abc	xy
00-	10
-01	11
1-1	10
11-	10

implikant-tabel

funktsiooni kõikide mintermide loetelu

- *implikanttabel* (implicant table) ehk *intervalltabel* ehk *kate* (cover) funktsiooni defineerimiseks piisavate implikantide loetelu
- *Miinimumkate* (minimum cover) – kate vähima implikantide arvuga (globaalne optimum)
- *Minimaalne kate* (minimal cover) ehk *liiasuseta kate* (irredundant cover) – kate, mis ei sisaldu üheski teises kattes, st. ühtegi implikanti ei saa eemaldada (lokaalne optimum)
- *Lihtimplikant* (prime implicant) – ei sisaldu üheski teises implikandis
- *Lihtkate* (prime cover) – kate lihtimplikantidest
- *Oluline* (essential) lihtimplikant – leidub minterm, mis on kaetud ainult selle lihtimplikandi poolt

olulised lihtimplikandid – x – α & δ ; y – β



lihtkate
miinimumkate

lihtkate
minimaalne kate

lihtkate

<u>Tõeväärtustabel</u>:

- 1-piirkond – $f = \Sigma_{a,b,c}\,(0,3,6,7)_1\ (4)_-$ / $f(a,b,c) = \Sigma\,(0,3,6,7)_1\ (4)_-$
- 0-piirkond – $f = \Pi_{a,b,c}\,(1,2,5)_0\ (4)_-$ / $f(a,b,c) = \Pi\,(1,2,5)_0\ (4)_-$
- Määramatused – väärtus on ebaoluline (-,*)

abc	f
000	1
001	0
010	0
011	1
100	-
101	0
110	1
111	1

abc	f
000	1
001	0
010	0
011	1
100	*1*
101	0
110	1
111	1

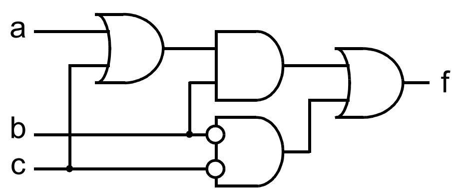
<u>Loogika-avaldis ja normaalkujud:</u>

$f = \overline{(b \oplus c)} + a\,b\,\bar{c}$; $f = b\,(a + c) + \bar{b}\,\bar{c}$; $f = b\,c + \bar{c}\,(a + \bar{b})$;

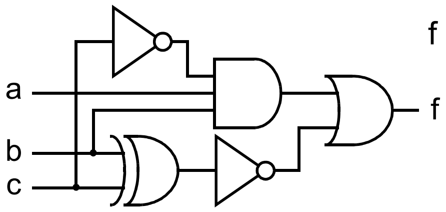
- DNK: $f = a\,b + b\,c + \bar{b}\,\bar{c}$; $f = b\,c + a\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c}$;

  $f = a\,b + b\,c + a\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c}$;
- KNK: $f = (b + \bar{c})\,(a + \bar{b} + c)$;

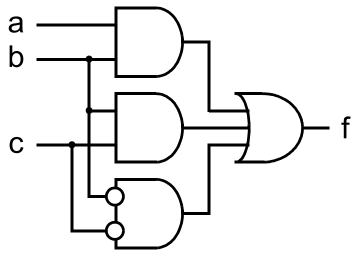
<u>Avaldis ja skeem</u> – $f = b\,(a + c) + \bar{b}\,\bar{c}$;

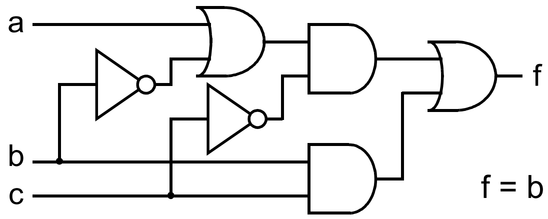


$f = \overline{(b \oplus c)} + a\,b\,\bar{c}$



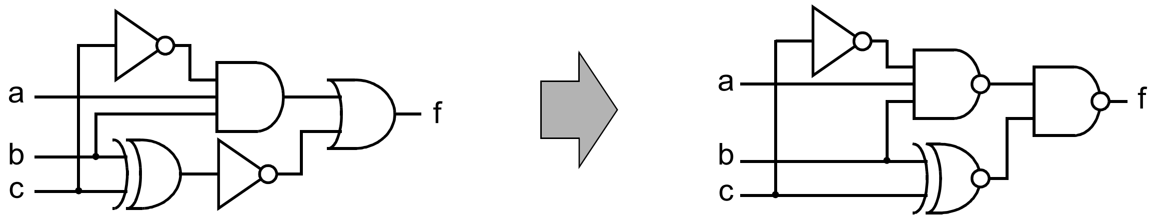
$f = a\,b + b\,c + \bar{b}\,\bar{c}$

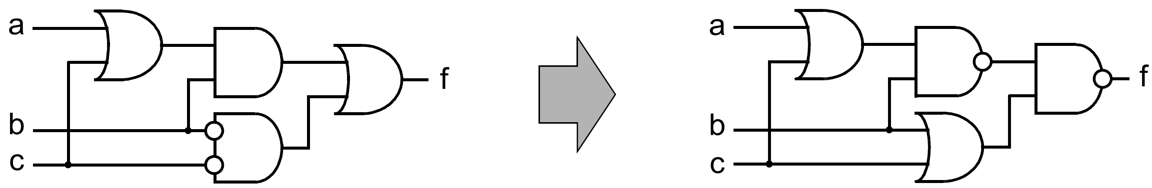




$f = b\,c + \bar{c}\,(a + \bar{b})$

<u>Skeemi optimaalsus</u> – Kuidas alustada ja mida kasutada?



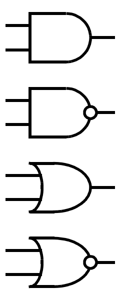


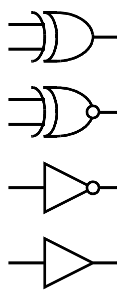
4. Loogikaelemendid

Lihtelemendid

- sisendite arv varieerub – 2 ... 4 (8), v.a. invertor (NOT) ja puhver (BUFF)
- koormatuvus – kuni ~10 (erijuhtudel rohkem)

CMOS – 2 transistori sisendi kohta (n&p), vajadusel ka väljundpuhver (-inverter)



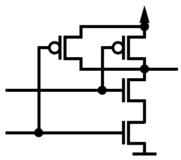


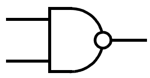
AND	$o=a.b$	XOR	$o=a\oplus b$
NAND	$o=\overline{(a.b)}$	XNOR	$o=a\overline{\oplus}b$
OR	$o=a+b$	NOT	$o=\bar{a}$
NOR	$o=\overline{(a+b)}$	BUFF	$o=a$

Pluss hulk komplekseid elemente
http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/applets/cmos/cmosdemo.html

Kahendloogika pööratavus

2-NAND





AND

a	b	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

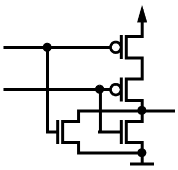
$0 \to 1$ / $1 \to 0$

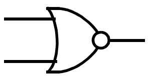
a	b	y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

OR

a	b	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2-NOR





NAND

a	b	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$0 \to 1$ / $1 \to 0$

a	b	y
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

NOR

a	b	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

5. Loogikasüntees ja minimeerimine

- Loogikafunktsiooni esituse optimeerimine – kahe-tasemelise esituse minimeerimine
  kahend-otsustus diagrammide (BDD – Binary Decision Diagrams) optimeerimine
- Mitme-tasemeliste kombinatsioonloogikavõrkude (-skeemide) süntees
  pindala, viite, võimsustarbe ja/või testitavuse optimeerimine
- Automaatide optimeerimine – olekute minimeerimine, kodeerimine
- Mitme-tasemeliste mäluga loogikavõrkude (-skeemide) süntees
  pindala, viite, võimsustarbe ja/või testitavuse optimeerimine
- Sidumine loogikaelementide teegiga – elementide optimaalne valik

<u>Loogikasünteesi eesmärgid</u>

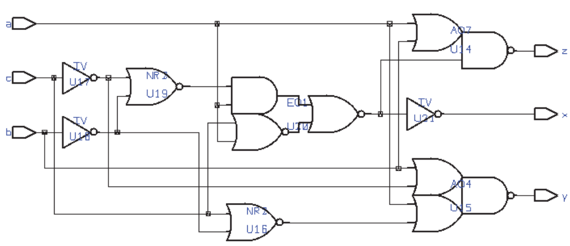
Lähteülesanne
(tõeväärtustabel)

abc	xyz
000	111
001	011
010	101
011	010
100	000
101	010
110	000
111	101

Minimeeritult
(implikant-kate)

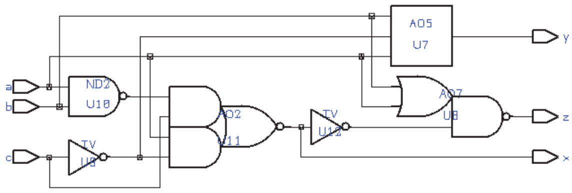
abc	xyz
111	101
-01	010
0-0	101
00-	011
0-1	010

$$x = a\,b\,c + \bar{a}\,\bar{c}$$
$$y = \bar{b}\,c + \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,c$$
$$z = a\,b\,c + \bar{a}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}$$



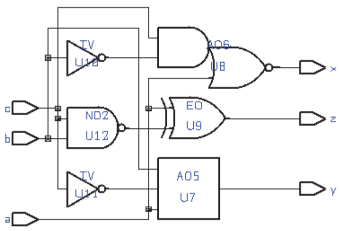
pindala	12.0
viide	2.73 ns
võimsus	11.3 μW

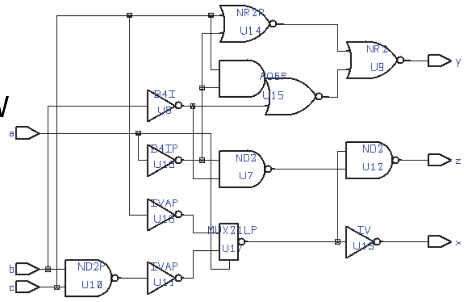
Optimeerimine – pindala, viide, võimsus:



<u>pindala</u> <u>10.0</u>
viide 2.26 ns
võimsus 10.2 µW

pindala 22.0
<u>viide</u> <u>1.57</u> ns
võimsus 24.1 µW





pindala 11.0
viide 1.84 ns
<u>võimsus</u> <u>9.2</u> µW

<u>Loogikafunktsioonide minimeerimine</u>

- Süntees ja optimeerimine
  lähtekirjelduse (tabel, skeem, HDL) teisendamine abstraktseks mudeliks
  teisendused abstraktsel mudelil (sobivad analüüsiks ja masintöötluseks)
  sidumine elementidega teegist
- Täpsed meetodid (nt. Quine-McCluskey meetod) leiavad miinimumkatte,
  tihtipeale võimatu suurte funktsioonide korral
- Heuristilised meetodid (MINI, PRESTO, ESPRESSO, ...) leiavad minimaalsed katted
  (miinimumkatte leidmine võimalik)
- Quine'i teoreem – miinimumkate on lihtkate
  → miinimumkatte otsimisel võib piirduda lihtimplikantidega
- Quine-McCluskey meetod – põhisammud – [1] leia lihtimplikandid, [2] leia miinimumkate
- Lihtimplikantide tabel – read – mintermid / veerud – lihtimplikandid [*või vastupidi... :-)*]
  eksponentsiaalne suurus! – 2^n mintermi (mida võib rühmitada)
  - kuni $3^n/n$ lihtimplikanti (osadel funktsioonidel on neid palju vähem)

<u>Minimeerimine == implikantide kleepimine</u>

Erinevus <u>täpselt ühes</u> järgus (vt. kleepimisseadused) võib vaadelda sulgude ette toomisega

- kleepuvad: $a\,b\,c + a\,\bar{b}\,c = a\,c\,(b + \bar{b}) = a\,c\,(1) = a\,c$
- ei kleepu: $a\,b\,c + a\,\bar{b}\,\bar{c} = a\,(b\,c + \bar{b}\,\bar{c})$

$y = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,c$

$y = \bar{a}\,\bar{b}\,(\bar{c} + c) + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,c$

$y = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,c$ – pole minimaalne?!

		c		b
	1	1	1	0
a	0	1	0	0

"Dubleerimine"?

$y = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,c$

$y = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c + \underline{\bar{a}\,\bar{b}\,c} + \bar{a}\,b\,c + \underline{\bar{a}\,\bar{b}\,c} + a\,\bar{b}\,c$

$y = \bar{a}\,\bar{b}\,(\bar{c} + c) + \bar{a}\,c\,(\bar{b} + b) + \bar{b}\,c\,(\bar{a} + a)$

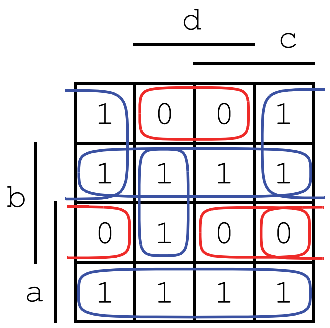
$y = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,c + \bar{b}\,c$

		c		b
	1	1	1	0
a	0	1	0	0

Sarnane dubleerimine töötab ka KNK korral

DNK või KNK

Implikantide kleepimisel ja katte leidmisel erinevusi pole, erinevus on tulemuse esitamises.
De Morgani seaduse abil saab ühest esitusviisist teise:
- DNK 1-de ja KNK 0-de järgi on funktsioon
- DNK 0-de ja KNK 1-de järgi on funktsiooni eitus



$f = b\,\bar{c}\,d + \bar{a}\,\bar{d} + \bar{a}\,b + a\,\bar{b}$ DNK 1-dest

$f = (a+b+\bar{d})\ (\bar{a}+\bar{b}+d)\ (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$ KNK 0-dest

$\bar{f} = \bar{a}\,\bar{b}\,d + a\,b\,\bar{d} + a\,b\,c$ DNK 0-dest

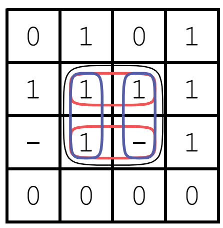
$f = (\bar{a}\,\bar{b}\,d + a\,b\,\bar{d} + a\,b\,c)'$ eitus

$f = (a+b+\bar{d})\ (\bar{a}+\bar{b}+d)\ (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$ De Morgan!

6. Täpne minimeerimie – lihtimplikantide leidmine

Implikantide kleepimine – erinevus <u>täpselt ühes</u> järgus (vt. kleepimisseadused)
võib vaadelda sulgude ette toomisega
- kleepuvad: $a\,b\,c + a\,\bar{b}\,c = a\,c\,(\,b + \bar{b}\,) = a\,c\,(\,1\,) = a\,c$
- ei kleepu: $a\,b\,c + a\,\bar{b}\,\bar{c} = a\,(\,b\,c + \bar{b}\,\bar{c}\,)$

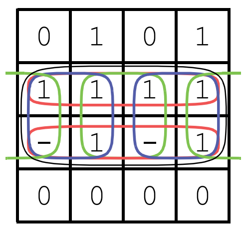
Alates kahestest kontuuridest (vähemalt üks ebaoluline muutuja implikandis) leidub alati <u>kaks või enam paari</u> kontuure (implikante), mis moodustava uue kontuuri (implikandi) – paaride arv on võrdne uue implikandi ebaoluliste muutujate arvuga



$\bar{a}\,b\,d + a\,b\,d = b\,d$

$b\,\bar{c}\,d + b\,c\,d = b\,d$

01-1	-101
11-1	-111
-1-1	-1-1



$\bar{a}\,b + a\,b = b$

$b\,\bar{c} + b\,c = b$

$b\,\bar{d} + b\,d = b$

01--	-10-	-1-0
11--	-11-	-1-1
-1--	-1--	-1--

<u>Lihtimplikantide leidmine - Quine meetod</u>
- mintermid on algsed implikandid ja - implikante proovitakse kleepida paarikaupa
- kaetud (ja dubleeritud) implikandid eemaldatakse
- kleepimist ja kaetute eemaldamist korratakse seni kuni enam uusi implikante ei moodustu

f(a,b,c,d) = Σ(0,2,4,5,6,7, 8,9,10,11,13)

algus

abcd
0000
0010
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1101

1. etapp

abcd	abcd
~~0000~~	-000
~~0010~~	0-10
~~0100~~	-010
~~0101~~	010-
~~0110~~	01-0
~~0111~~	100-
~~1000~~	10-0
~~1001~~	01-1
~~1010~~	-101
~~1011~~	011-
~~1101~~	10-1
00-0	1-01
0-00	101-

2. etapp

abcd	abcd
~~00-0~~	~~10-1~~
~~0-00~~	1-01
~~-000~~	~~101-~~
~~0-10~~	0--0
~~-010~~	~~0--0~~
~~010-~~	-0-0
~~01-0~~	~~-0-0~~
~~100-~~	01--
~~10-0~~	~~01--~~
~~01-1~~	10--
-101	~~10--~~
~~011-~~	

tulemus

abcd
-101
1-01
0--0
-0-0
01--
10--

Lihtimplikantide leidmine – Quine-McCluskey meetod

Kitsendused lihtimplikantide leidmisel:

- mintermid grupeeritakse 1-de arvu alusel
- kleepida proovitakse ainult naabergruppide implikante (vrdl. erinevust 1-de arvus!)
- ainult määramata väljundtulemus(t/i) kattev implikant on eritähistusega (nt. tärn)
  kahe sellise implikandi kleepumisel levib tähistus edasi –
  mõte on selles, et kui implikant katab ainult määramatusi, siis pole teda kattesse vaja
- implikantide kleepimisel tuleks arvestada ka ebaoluliste muutujate kokkulangevusi
  kleepuda võivad ainult need, mis sõltuvad samadest muutujatest

Käsitsi arvutamise lihtustamiseks kasutusel 10-nd kodeering

“01-0”-le vastab “4 (2)”, “4/6” või “4/6 (2)”

kleepimisel võrreldakse, kas vahe on 2 aste – 01<u>0</u>0 <> 01<u>1</u>0 vs. 4 <> 6

Näiteülesanne: `f(a,b,c,d) = Σ(0,2,4,5,6,7,8,9,10,11,13)`

Lihtimplikantide leidmine kahendkujul:

mintermid

gr.	abcd	
0	0000	*
1	0010	*
	0100	*
	1000	*
2	0101	*
	0110	*
	1001	*
	1010	*
3	0111	*
	1011	*
	1101	*

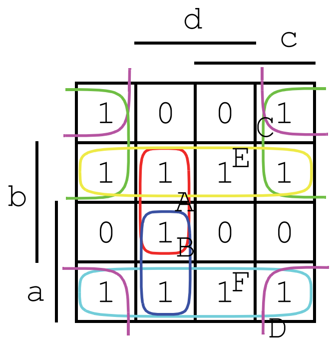
1\. etapp

gr.	abcd	
0	00-0	*
	0-00	*
	-000	*
1	0-10	*
	-010	*
	010-	*
	01-0	*
	100-	*
	10-0	*
2	01-1	*
	-101	A
	011-	*
	10-1	*
	1-01	B
	101-	*

2\. etapp

gr.	abcd	
0	0--0	C
	-0-0	D
1	01--	E
	10--	F

* - on kaetud



Lihtimplikantide leidmine kümnendarvude abil:

mintermid

gr.		
0	0	*
1	2	*
	4	*
	8	*
2	5	*
	6	*
	9	*
	10	*
3	7	*
	11	*
	13	*

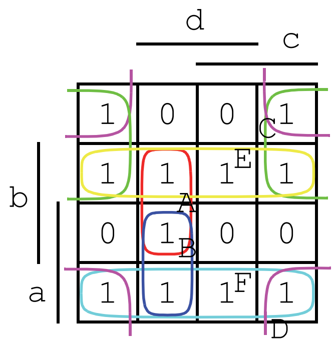
1\. etapp

gr.		
0	0 (2)	*
	0 (4)	*
	0 (8)	*
1	2 (4)	*
	2 (8)	*
	4 (1)	*
	4 (2)	*
	8 (1)	*
	8 (2)	*
2	5 (2)	*
	5 (8)	A
	6 (1)	*
	9 (2)	*
	9 (4)	B
	10 (1)	*

2\. etapp

gr.		
0	0 (2,4)	C
	0 (2,8)	D
1	4 (1,2)	E
	8 (1,2)	F

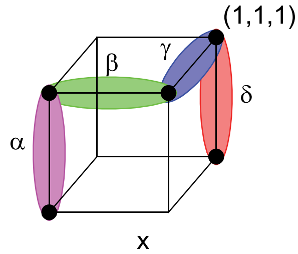
* - on kaetud



7. Täpne minimeerimie – katte leidmine

<u>Tabeli redutseerimine</u> – iteratiivne oluliste lihtimplikantide identifitseerimine, märkimine ja tabelist eemaldamine koos kaetud mintermidega

	abc x
α	00- 1
β	-01 1
γ	1-1 1
δ	11- 1

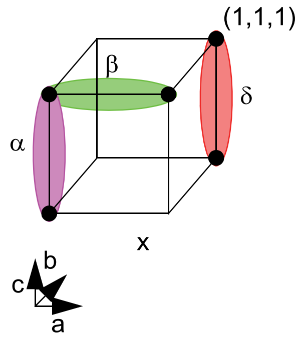


Varased katte leidmise meetodid

<u>Petrick'i meetod</u>

- implikandid summade korrutisena (pos)
- viia üle korrutiste summaks (sop)
- valida väikseim korrutis
- pos - $(\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\delta)(\gamma+\delta) = 1$
- sop - $\alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta = 1$
- Lahendused - $\{\alpha,\beta,\delta\}$ või $\{\alpha,\gamma,\delta\}$

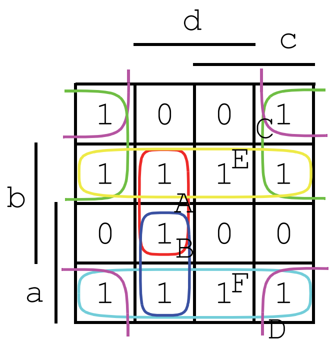
abc	α β γ δ
000	1 0 0 0
001	1 1 0 0
101	0 1 1 0
110	0 0 0 1
111	0 0 1 1



Näiteülesanne: $x = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c + a\,\bar{b}\,c + a\,b\,\bar{c} + a\,b\,c$

lihtimplikantide tabel

abcd	A	B	C	D	E	F
0000	0	0	1	1	0	0
0010	0	0	1	1	0	0
0100	0	0	1	0	1	0
1000	0	0	0	1	0	1
0101	1	0	0	0	1	0
0110	0	0	1	0	1	0
1001	0	1	0	0	0	1
1010	0	0	0	1	0	1
0111	0	0	0	0	1	0
1011	0	0	0	0	0	1
1101	1	1	0	0	0	0



ACEF:
$f = b\,\bar{c}\,d + \bar{a}\,\bar{d} + \bar{a}\,b + a\,\bar{b}$

ADEF:
$f = b\,\bar{c}\,d + \bar{b}\,\bar{d} + \bar{a}\,b + a\,\bar{b}$

BCEF:
$f = a\,\bar{c}\,d + \bar{a}\,\bar{d} + \bar{a}\,b + a\,\bar{b}$

BDEF:
$f = a\,\bar{c}\,d + \bar{b}\,\bar{d} + \bar{a}\,b + a\,\bar{b}$

Lahenduskäik:

(C+D)(C+D)(C+E)(D+F)(A+E)(C+E)(B+F)(D+F)(E)(F)(A+B)=1
(C+D)(C+E)(D+F)(A+E)(B+F)(E)(F)(A+B)=1
(CC+CE+DC+DE)(DA+DE+FA+FE)(BE+FE)(FA+FB)=1
(C+DE)(AD+AF+DE+EF)(BE+EF)(AF+BF)=1
(CAD+CAF+CDE+CEF+DEAD+DEAF+DEDE+DEEF)(BEAF+BEBF+EFAF+EFBF)=1
(ACD+ACF+CEF+DE)(BEF+AEF)=1
(ACDBEF+ACDAEF+ACFBEF+ACFAEF+CEFBEF+CEFAEF+DEBEF+DEAEF)=1
ACEF+ADEF+BCEF+BDEF=1

Teised lahendusviisid:

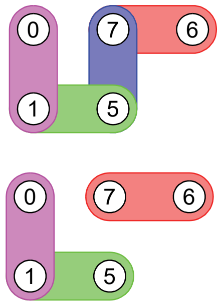
<u>Maatriksesitus</u> - Täisarvuline lineaarplaneerimisülesanne
(integer linear programming, ILP)
- Implikantide tabel on kahendmaatriks *A*
- Valitud implikandid on kahendvektor *x*
- Leida selline *x*, et $A\,x \geq 1$

valida piisav arv veerge, et kõik read oleksid kaetud; minimeerida *x* võimsust

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

<u>Operatsioonid hulkadega</u>

- Hulga katte leidmine
  Hulk S – mintermide hulk
  Hulk C, alamhulkade kogu ($c_i \subseteq S$) – lihtimplikantide hulk
  Leida vähim arv C elemente, et kõik S elemendid oleksid kaetud
- Hüpergraafi tipukatte leidmine
  Sõlmede hulk – mintermide hulk
  Hüperservade hulk – lihtimplikantide hulk
  Tuleb leida vähim arv servi, et kõik sõlmed oleksid kaetud



Kiirendamisvõtted

Olulised lihtimplikandid peavad kuuluma kattesse, st. need implikandid ja nende poolt kaetud mintermid võib eemaldada edasisest analüüsist.

Sõltumatud rühmad (omavahel mittesidusad alamgraafid) võib lahendada eraldi.

Implikandi domineerimine – kui implikant (i) on kaetud mõne domineeriva (j) poolt, siis võib ta eemaldada (maatriksis - $a_{ki} \leq a_{kj}$ $\forall k$; tekib mittetäielikult määratud funktsioonide korral)

Mintermi domineerimine – kui domineeriv minterm (i) on kaetud vähemalt samade implikantide poolt, mis mõni teinegi minterm (j), siis võib ta edasisest analüüsist eemaldada, sest kõik lahendused, mis katavad (j) katavad ka (i) [maatriksis - $a_{ik} \geq a_{jk}$ $\forall k$; tekib mintermide korral, mis on kaetud rohkem kui ühe implkandi poolt]

oluline lihtimplikant – a [0-01] ja b [-1-1]
domineeriv implikant – b [-1-1] (> c [-11-])
domineeriv minterm – [0101] (> [0001])

0	1	0	0
0	1	1	-
0	1	1	-
0	0	0	0

	a	b	c
0001	1	0	0
0101	1	1	0
0111	0	1	1
1101	0	1	0
1111	0	1	1

Näiteülesanne – lihtimplikantide katte leidmine

lihtimplikantide tabel

	abcd	A	B	C	D	E	F
	0000			+	+		
	0010			+	+		
	~~0100~~			+		+	
	~~1000~~				+		+
	~~0101~~	+				+	
	~~0110~~			+		+	
	~~1001~~		+				+
	~~1010~~				+		+
*	0111					*	
*	1011						*
	1101	+	+				

* - olulised E, F

abcd	A	B	C	D
0000			*	+
0010			*	+
1101	*	+		

A, C

	1	0	0	1
b	1	1	1	1
b	0	1	0	0
a	1	1	1	1

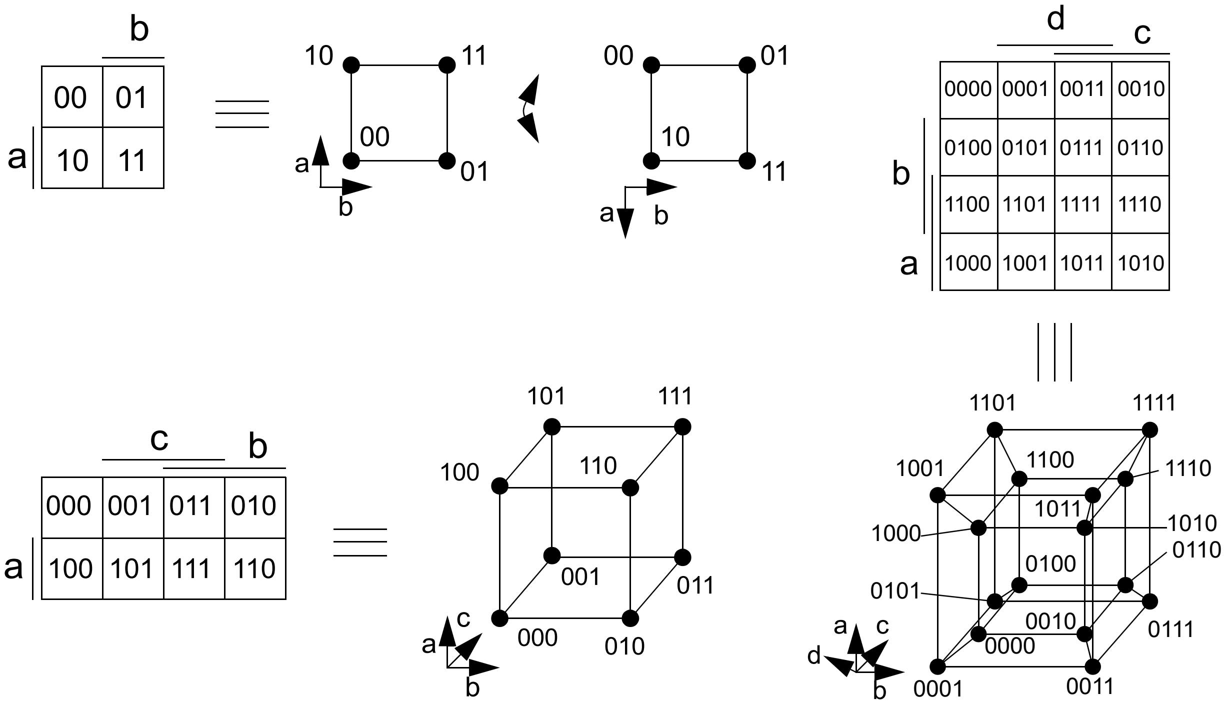
$$f = \underbrace{b\,\bar{c}\,d}_{A} + \underbrace{\bar{a}\,\bar{d}}_{C} + \underbrace{\bar{a}\,b}_{E} + \underbrace{a\,\bar{b}}_{F}$$

8. Heuristiline minimeerimine

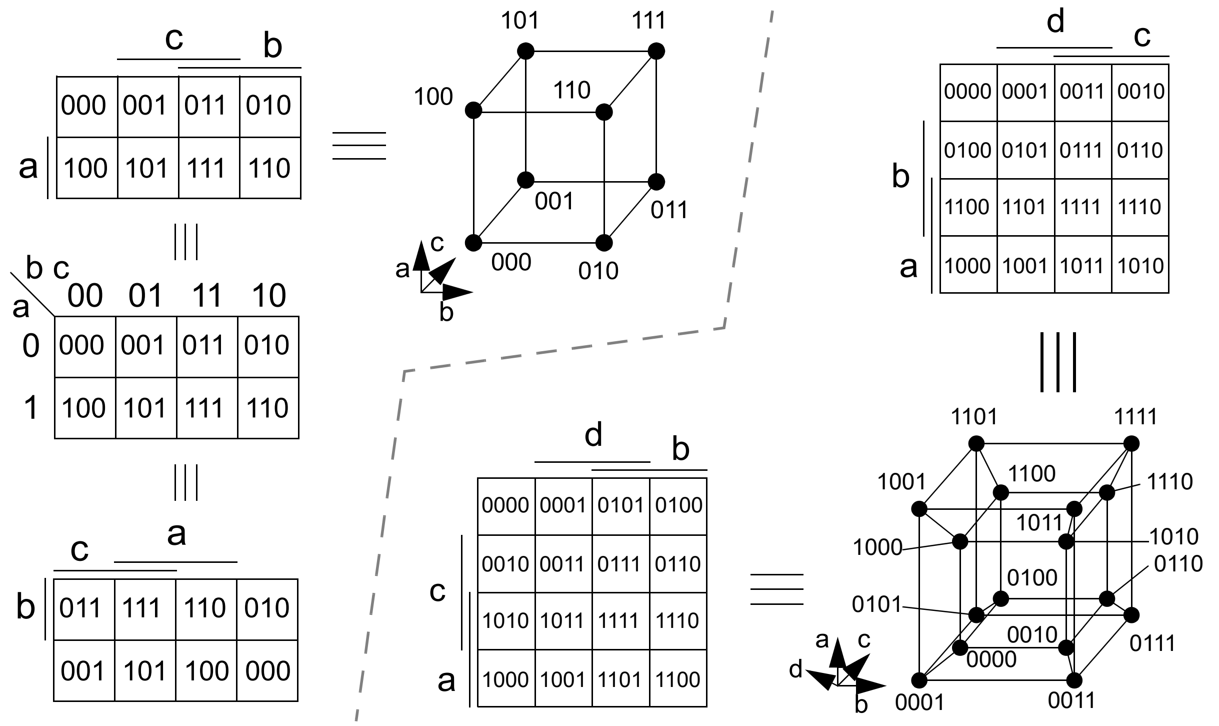
Täpne minimeerimine on kallis – kõikvõimalike lihtimplikantide leidmine nõuab mälu ja aega. Heuristiline minimeerimine väldib täpse minimeerimise kitsaskohti (leiab "mõistliku" suurusega liiasuseta katted).

- Kiirus ja rakendatav paljudes valdkondades
- Lokaalne miinimumkate – antud on esialgne kate; teisendus lihtkatteks; liiasuste eemaldamine
- Iteratiivne parendamine – suurust parendatakse implikantide “modifitseerimise” teel; laiendus /kahandus otsustatakse naaberimplikantide põhjal

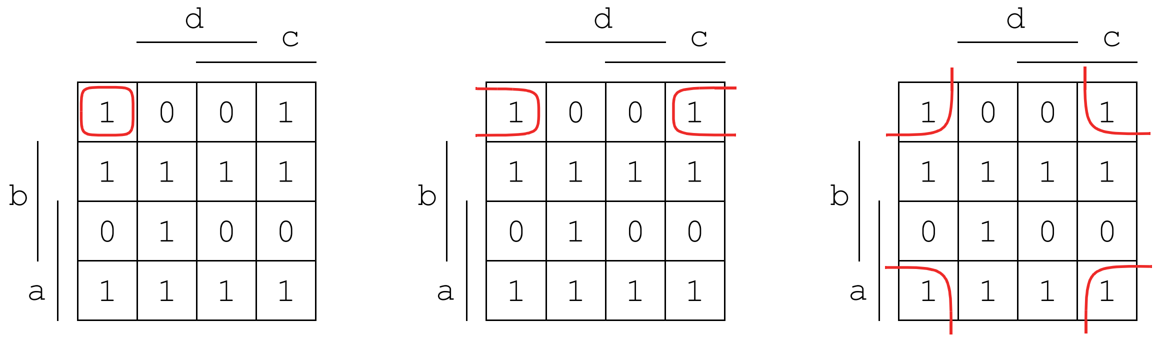
<u>Karnaugh kaart</u> – seos hüperkuubiga:



<u>Karnaugh kaart</u> – erinevad esitused/vaated:

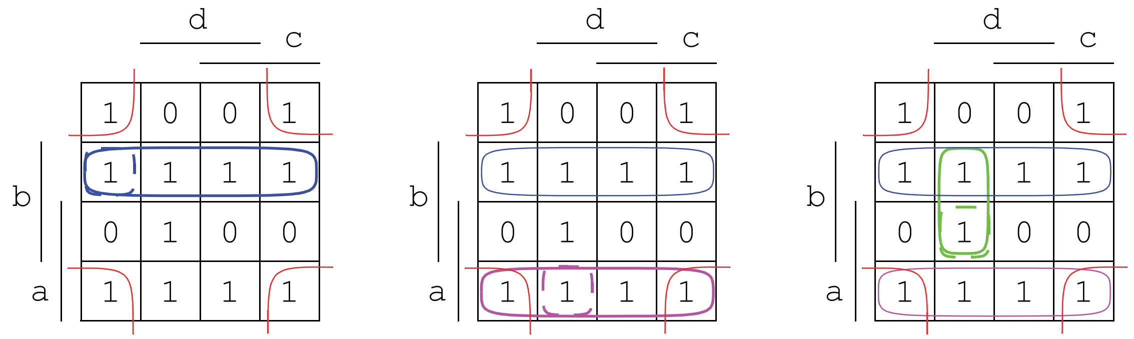


Karnaugh kaart – minimeerimise näide – f(a,b,c,d) = Σ(0,2,4,5,6,7,8,9,10,11,13)$_1$:



Implikandi (kontuuri) laiendamine – millest alustada? Praktiliselt kaks lähenemist:

- alustada kõige suurematest kontuuridest ("tihedalt asustatud piirkond") või
- alustada neist, mida saab vähe laiendada ("hõredalt asustatud piirkond", vrdl olulised lihtimplikandid).



Tulemus – **f** = $b\,\bar{c}\,d + \bar{b}\,\bar{d} + \bar{a}\,b + a\,\bar{b}$.

Vt. ka apletti http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/applets/kvd/kvd.html

Nõrgalt määratud funktsioonide minimeerimine

- $|F_F| + |F_R| << |F_D|$ – Funktsiooni argumentide arv on suur

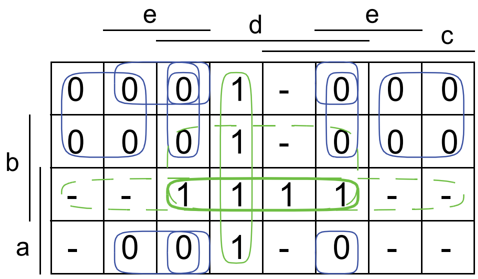
|- $F_F| + |F_R|$ on esitatud intervallidena, st. on olemas esialgne kate

- F_F-i kuuluvaid intervalle laiendatakse selliselt, et laiendus jääks F_D sisse
  ükski 1-intervall ei tohi omada ühisosa ühegi 0-intervalliga (mittekattuvad)
  ortogonaalsusfunktsioon – näitab, milliste argumentide järgi on intervallide paari teatud argumendi väärtus ühes intervallis 1, teises 0
  kaks intervalli on mittekattuvad, kui nad on ortogonaalsed vähemalt ühe argumendi järgi
  ortogonaalsed mitme argumendi järgi → osa argumente võib vabastada
- <u>Näide #1</u>: 000- # 1011 -> 1010, seega võib esimese neist asendada kas 00-- või -00-'ga (eeldusel, säilib ortogonaalsus ka teiste 0-intervallidega)
- <u>Näide #2</u>: 11-1- saaks laieneda nii -1-1-'ks kui ka 11---'ks, kuid esimesel juhul tekib kattumine 0--11'ga, teine on lubatud.

Selle meetodi probleemiks on ainult osaline laienduste proovimine – --010 ei saaks justkui üldse laieneda, kuid ---10 oleks korrektne tulemus.

Näide #2

```
  a b c d e
1 1 1 - 1 -
  - - 0 1 0
0 0 - - 0 -
  - 0 0 - 1
  - 0 - 1 1
  0 - - 1 1
```



```
11-1- # 0--0- = 10010
11-1- # -00-1 = 01000
11-1- # -0-11 = 01000
11-1- # 0--11 = 10000
```

~~-1-1- # 0--0- = 00010~~
~~-1-1- # -00-1 = 01000~~
~~-1-1- # -0-11 = 01000~~
~~-1-1- # 0--11 = 00000~~

```
11--- # 0--0- = 10000
11--- # -00-1 = 01000
11--- # -0-11 = 01000
11--- # 0--11 = 10000
```

9. Heuristiliste minimeerimiste põhioperaatorid

- Laiendus (Expand) – implikantide teisendus lihtimplikantideks (ja kaetute eemaldamine)
- Kitsendus (Reduce) – implikantide suuruse vähendamine (hoides katte korrektse)
- Ümberkujundus (Reshape) – implikantide paaride muutmine suurendades üht ja vähendades mõnda teist
- Liiasusetus (Irredundant) – liiasuse eemaldamine kattest

Näiteülesanne – laiendus:

0000	*exp*
0010	x
0100	x
0101	
0110	x
0111	
1000	
1001	
1010	
1011	
1101	

0000 → 0--0

0--0 katab 0010 0100 0110

0--0	a
0101	*exp*
0111	x
1000	
1001	
1010	
1011	
1101	

0101 → 01--

01-- katab [0100] [0110] 0111

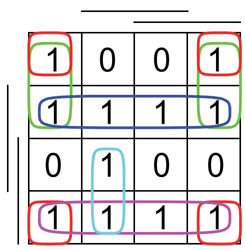
0--0	a
01--	c
1000	*exp*
1001	
1010	x
1011	
1101	

Ülejäänud sammud:

0--0	a
01--	c
-0-0	b
1001	*exp*
1011	x
1101	

0--0	a
01--	c
-0-0	b
10--	d
1101	*exp*

0--0	a
01--	c
-0-0	b
10--	d
1-01	e



{a,b,c,d,e}

Näiteülesanne – <u>kitsendus</u>:

0--0	xxxx
01--	c
-0-0	b
10--	d
1-01	e

0--0
↓
00-0
↓
0000

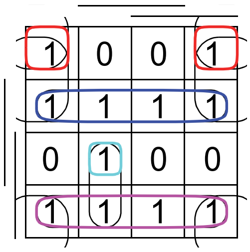
-0-0
katab
~~0000~~

01--	c
-0-0	00-0
10--	d
1-01	e

01--	c
00-0	b’
10--	d
1-01	1101

01--	c
00-0	b’
10--	d
1101	e’

{ b’,c,d,e’ }



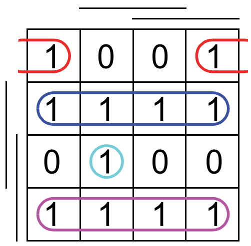
Kaetuse analüüs:
-0-0 & <u>0000</u> = <u>0000</u> - katab

Võrdluseks:
-0-0 & 10-- = 10-0 - ei kata

Näiteülesanne – <u>ümberkujundus</u>:

{ b’,c,d,e’ }

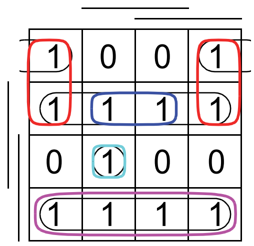
01--	01-1
00-0	0--0
10--	d
1101	e’



➔

01-1	c’
0--0	a
10--	d
1101	e’

{ a,c’,d,e’ }



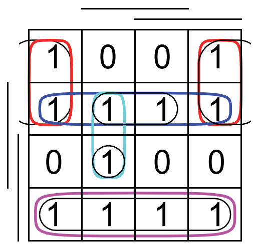
Näiteülesanne – <u>laiendus #2</u>:

01-1	*exp*
0--0	a
10--	d
1101	e’

01--	c
0--0	a
10--	d
1101	*exp*

01--	c
0--0	a
10--	d
-101	f

{ a,c,d,f }



<u>Kokkuvõte</u>

MINI sammud:

- Laiendus: kate – {a,b,c,d,e} – lihtkate, liiasusega (ükski implikant ei sisaldu mõnes teises)
- Kitsendus: a eemaldatakse; b [-0-0] → b’ [00-0] ; e [1-01] → e’ [1101] ; kate – (b’,c,d,e’)
- Ümberkujundus: {b’,c} [00-0][01--] → {a,c’} [0--0][01-1]
- Laiendus #2: kate – {a,c,d,f} ; lihtkate, liiasuseta

Intuitiivne laiendus – iga implikandi puhul asenda ‘0’ või ‘1’ võimaluse korral ‘-’; eemalda kõik kaetud implikandid. Probleemiks on igsuse kontroll ja implikantide järjekord.

Õigsuse kontroll:

Espresso, MINI – kontrollitakse laiendatud implikandi *ühisosa* kõigi 0-implikantidega (F_R), täienduse leidmine vajalik.

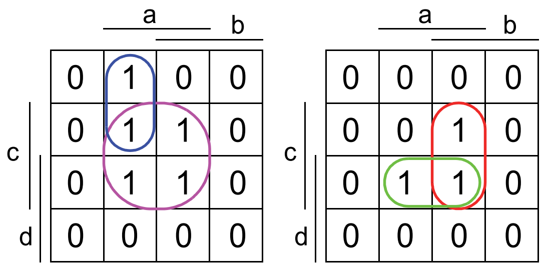
Presto – kontrollitakse laiendatud implikandi sisaldumist 1- ja *-implikantide ühendis ($F_F \cup F_D$), taandub nn. rekursiivsele tautoloogia kontrollile.

Laiendus – heuristilised võtted: Laiendada tuleks esimesena need intervallid, millede katmine teiste poolt on vähetõenäoline. Kasutusel on kaalutud intervallid – mida suurem kaal, seda väiksem on võimalik kaetavus (“hõredalt asustatud ümbruskond”).
Kitsendus – heuristilised võtted: Kasutusel on samuti kaalutud intervallid – mida väiksem kaal, seda suuremad võimalised kitsendamiseks (“tihedalt asustatud ümbruskond”).
Liiasuse eemaldamine: Kõigepealt tehakse kindlaks olulised intervallid. Katte probleem lahendatakse heuristiliselt.
Espresso sammud:
- Täiendi leidmine
- Oluliste intervallide/mintermide määramine (pärast laiendamist ja liiasuse eemaldmist)
- Iteratsioon – laiendus, liiasusetus, kitsendus
- Kaalufunktsioonid – katte võimsus & intervallide ja literaalide arvu kaalutud summa

10. Funktsioonide süsteemi minimeerimine

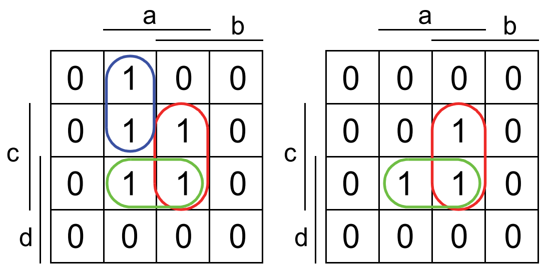
Funktsioone üksikult minimeerides võivad ühised implikandid jääda märkamata:

abcd	xy
10-0	10
1-1-	10
1-11	01
111-	01



funktsioonid eraldi

abcd	xy
10-0	10
1-11	11
111-	11

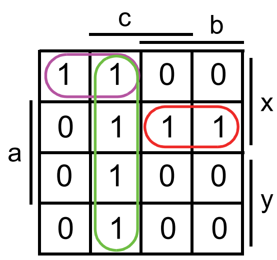


funktsioonid korraga

Väljundite hulka vaadeldakse kui täiendavat mitmevalentset sisendit:

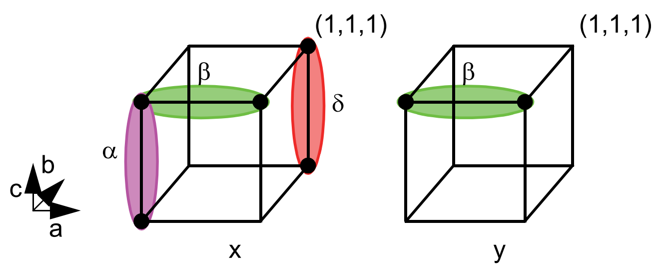
abc	xy
000	10
001	11
101	11
110	10
111	10

abc0	
0001	1
001-	1
101-	1
1101	1
1111	1



abc0	
00-1	1
-01-	1
11-1	1

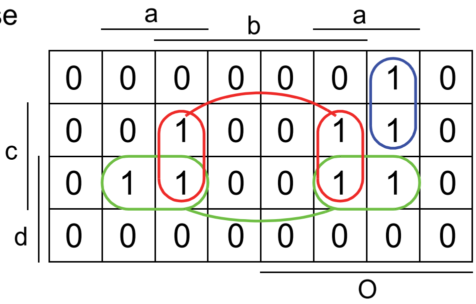
abc	xy
00-	10
-01	11
11-	10



Sarnasus sümbolkodeeringuga:

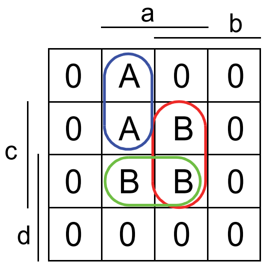
abcdO	z
10-01	1
1-1-1	1
1-110	1
111-0	1

mitme-valentse loogika abil



abcdO	z
10-01	1
1-11-	1
111--	1

sümbol-kodeeringu abil



abcd	xy
10-0	10
1-11	11
111-	11

Mitme-valentne loogika (Multiple-Valued Logic - MVL)

Post'i algebra on Boole'i algebra üldistus. Kasutatakse matemaatilise baasina MVL loogika-lülide projekteerimisel. Post, 1921. a. – esimene mitmeväärtuseline (mitmevalentne) loogika.

- Kahendloogika – (B,*,+,~), B={0,1}
  täielikult määratud funktsioonid – $f: B^n \to B$ ja $f: B^n \to B^m$
  mittetäielikult määratud funktsioonid – $f: B^n \to \{0,1,\text{-}\}^m$ (ka $f{:}B^n \to \{0,1,*\}^m$)
  AND, OR, NOT – loogikafunktsioonide täielik süsteem
- MV-loogika – $(\{P_i\},\text{MIN},\text{MAX},\text{literal})$, $P_i=\{0,1,\ldots,m_i\text{-}1\}$
  mittetäielikult määratud funktsioonid – $f: P_1 x P_2 x \ldots x P_n \to P_m$
  või ka $f: P_1 x P_2 x \ldots x P_n \to \{0,1,\text{-}\}^m$
  MIN, MAX, literal - MVL-funktsioonide täielik süsteem

Operatsioonid:

- MIN(x, y) – minimaalne x ja y väärtus [·] – vrdl. AND kahendloogikas
- MAX(x, y) – maksimaalne x ja y väärtus [+] – vrdl. OR kahendloogikas
- literaal (literal) – unaarne operatsioon – $x_i^{\{ci\}} = m_i\text{-}1$, kui x_i=ci, muidu 0
  tähistus – $x_1^{\{2\}} \equiv x_1^{2}$ ja $x_1^{\{2\}} \equiv \overset{2}{x_1}$
- hulkliteraal (set literal) – $x_i^{\{S\}} = m_i\text{-}1$, kui $x_i \in S$, muidu 0 ; tähistus $x_3^{\{0,2\}} \equiv \overset{\{0,2\}}{x_3} \equiv \overset{0,2}{x_3}$
  vrdl. kahendloogikaga – $x_i^{\{0\}} == \overline{x}_i$, $x_i^{\{1\}} == x_i$, $x_i^{\{0,1\}} ==$ **-** (don't-care)
- Shannoni arendus – $f() = \overline{x} f_{\overline{x}}() + x f_x()$ / $f() = x^0 f_{x0}() + x^1 f_{x1}() + \ldots + x^{m-1} f_{xm-1}()$

Esitusviisid – avaldised, tõeväärtustabelid, Karnaugh kaart:

Tähistused: " · " – MIN ; "+" – MAX ; $x^{\{i\}}$ – x'i literal

$$f(x_1,x_2) = 1x_1^{\{1\}}x_2^{\{0\}} + 1x_1^{\{1\}}x_2^{\{1\}} + 2x_1^{\{0\}}x_2^{\{2\}} + 2x_1^{\{2\}}x_2^{\{2\}}$$
$$f(x_1,x_2) = 1x_1^{\{1\}}x_2^{\{0,1\}} + 2x_1^{\{0,2\}}x_2^{\{2\}}$$

x_1	x_2	f	
0	0	0	$0 \cdot x_1^{\{0\}} \cdot x_2^{\{0\}}$
0	1	0	$0 \cdot x_1^{\{0\}} \cdot x_2^{\{1\}}$
0	2	2	$2 \cdot x_1^{\{0\}} \cdot x_2^{\{2\}}$
1	0	1	$1 \cdot x_1^{\{1\}} \cdot x_2^{\{0\}}$
1	1	1	$1 \cdot x_1^{\{1\}} \cdot x_2^{\{1\}}$
1	2	0	$0 \cdot x_1^{\{1\}} \cdot x_2^{\{2\}}$
2	0	0	$0 \cdot x_1^{\{2\}} \cdot x_2^{\{0\}}$
2	1	0	$0 \cdot x_1^{\{2\}} \cdot x_2^{\{1\}}$
2	2	2	$2 \cdot x_1^{\{2\}} \cdot x_2^{\{2\}}$

Tõeväärtustabel

Karnaugh kaart

x_2 \ x_1	0	1	2
0	0	1	0
1	0	1	0
2	2	0	2

x_2 \ x_1	0	1	2
0	0	1	0
1	0	1	0
2	2	0	2

MV-funktsioonide minimeerimine

Ei midagi uut! On antud funktsiooni *F* ühtede (*f*) ja määramata (*d*) (ja nullide (*r*)) piirkondade katted. Leida minimaalne korrutiste-summa kuju funktsioonile *F* . Kaks põhisammu:

- Genereerida *f*+*d* lihtimplikandid
- Luua implikantide tabel, lahendada katte probleem

Algoritmid erinevad ainult pisiasjades jaimplikantide leidmisel kasutatakse samu operatsioone. Kahendfunktsioonide süsteem n-muutjaga ja k-väljundiga teisendatakse n+1-muutujaga ja 1-väljundiga funktsiooniks, üks sisendmuutujaist on MV:

$\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^k \quad \equiv \quad \{0,1\}^n \times \{0, 1, ..., m\text{-}1\} \rightarrow \{0,1\}$

Hong'i teoreem – iga n-muutuja implikant pluss vastavad väljundid moodustavad ühe implikandi n+1-ruumis; väljundite arv määrab täiendava sisendi valentside arvu; implikandi määratud väljundid moodustavad hulk-literaali täiendavas sisendis

Lihtimplikantide leidmine on sarnane üksiku funktsiooni implikantide leidmisega:

- erinevus täpselt ühes järgus (vt. kleepimisseadused), võib vaadelda sulgude ette toomisega praktikas tasub eristada, kas erinevus on kahend- või MV-sisendis
- Erinevus ühes kahendsisendis: täpselt üks kahendsisend on erinev – ühes 0 ja teises 1 (ning MV-osad identsed) kleepuvad: $a^0b^0c^0e^0 + a^0b^1c^0e^0 = a^0c^0e^0\,(b^0+b^1) = a^0b^{\{0,1\}}c^0e^0$
- Erinevus MV-sisendis: kõik kahendsisendid on identsed kleepuvad: $a^0b^1c^1e^0 + a^0b^1c^1e^1 = a^0b^1c^1\,(e^0+e^1) = a^0b^1c^1e^{\{0,1\}}$
- Vektoresitus – kahendosa '0', '1' ja '-'; MV-osa positsioonilise kodeeringuga:
  $a^0b^0c^0e^0 + a^0b^1c^0e^0$: 000 100 + 010 100 => 0-0 100
  $a^0b^1c^1e^0 + a^0b^1c^1e^1$: 011 100 + 011 010 => 011 110

Funktsioonide süsteem – 3 isendit ja 3 väljundit – funktsioonid üksikult minimeerides:

abc	xyz
000	111
001	011
010	101
011	110
100	000
101	010
110	000
111	101

1	0	1	1
0	0	1	0

1	1	1	0
0	1	0	0

1	1	0	1
0	0	1	0

abc	xyz
0-0	101
-11	100
00-	011
0-1	010
-01	010
111	001

Teisendus MV-funktsiooniks (signatuurfunktsiooniks):

abc	xyz
000	111
001	011
010	101
011	110
100	000
101	010
110	000
111	101

$$x(a,b,c) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,c$$
$$y(a,b,c) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,c$$
$$z(a,b,c) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c + \bar{a}\,b\,\bar{c} + a\,b\,c$$

f: {0,1}x{0,1}x{0,1}x{0,1,2} -> {0,1}

$$o(a,b,c,e)=a^0b^0c^0e^0+a^0b^1c^0e^0+a^0b^1c^1e^0+$$
$$+a^1b^1c^1e^0+a^0b^0c^0e^1+a^0b^0c^1e^1+$$
$$+a^0b^1c^1e^1+a^1b^0c^1e^1+a^0b^0c^0e^2+$$
$$+a^0b^0c^1e^2+a^0b^1c^0e^2+a^1b^1c^1e^2$$

abc	e	o	
000	100	1	*1*
010	100	1	*2*
011	100	1	*3*
111	100	1	*4*
000	010	1	*5*
001	010	1	*6*
011	010	1	*7*
101	010	1	*8*
000	001	1	*9*
001	001	1	*10*
010	001	1	*11*
111	001	1	*12*

MV-implikantide kleepimine:

$$\underset{3.}{a^0b^1c^1e^0} + \underset{7.}{a^0b^1c^1e^1} = a^0b^1c^1e^{\{0,1\}}$$

$$\underset{1.}{a^0b^0c^0e^0} + \underset{2.}{a^0b^1c^0e^0} + \underset{9.}{a^0b^0c^0e^2} + \underset{11.}{a^0b^1c^0e^2} = \ldots$$
$$\ldots = a^0b^{\{0,1\}}c^0e^0 + a^0b^{\{0,1\}}c^0e^2 = a^0b^{\{0,1\}}c^0e^{\{0,2\}} = a^0c^0e^{\{0,2\}}$$

$$\underset{5.}{a^0b^0c^0e^1} + \underset{9.}{a^0b^0c^0e^2} + \underset{6.}{a^0b^0c^1e^1} + \underset{10.}{a^0b^0c^1e^2} = \ldots$$
$$\ldots = a^0b^0c^0e^{\{1,2\}} + a^0b^0c^1e^{\{1,2\}} = a^0b^0c^{\{0,1\}}e^{\{1,2\}} = a^0b^0e^{\{1,2\}}$$

Minimeerimine – esimested kleepimised:

abc	e	o	
000	100	1	*1*
010	100	1	*2*
011	100	1	*3*
111	100	1	*4*
000	010	1	*5*
001	010	1	*6*
011	010	1	*7*
101	010	1	*8*
000	001	1	*9*
001	001	1	*10*
010	001	1	*11*
111	001	1	*12*

$$\underset{1.}{a^0b^0c^0e^0} + \underset{2.}{a^0b^1c^0e^0} + \underset{9.}{a^0b^0c^0e^2} + \underset{11.}{a^0b^1c^0e^2} = \ldots$$

$$\ldots = a^0b^{\{0,1\}}c^0e^0 + a^0b^{\{0,1\}}c^0e^2 = a^0b^{\{0,1\}}c^0e^{\{0,2\}} = \underline{a^0c^0e^{\{0,2\}}}$$

mintermid

gr.	abc	e
0	000	100
	000	010
	000	001
1	010	100
	001	010
	001	001
	010	001
2	011	100
	011	010
	101	010
3	111	100
	111	001

1. etapp

gr.	abc	e
0	000	110
	000	101
	000	011
	0-0	100
	00-	010
	00-	001
	0-0	001
1	010	101
	001	011
	. . .	

2. etapp

gr.	abc	e
0	000	111
	0-0	101
	. . .	

c b a

1	0	1	1
0	0	1	0

1	1	1	0
0	1	0	0

1	1	0	1
0	0	1	0

Minimeerimine – kõik lihtimplikandid:

mintermid

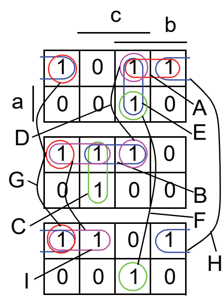
gr.	abc	e	
0	000	100	*
	000	010	*
	000	001	*
1	010	100	*
	001	010	*
	001	001	*
	010	001	*
2	011	100	*
	011	010	*
	101	010	*
3	111	100	*
	111	001	*

1. etapp

gr.	abc	e	
0	000	110	*
	000	101	*
	000	011	*
	0-0	100	*
	00-	010	*
	00-	001	*
	0-0	001	*
1	010	101	*
	001	011	*
	01-	100	A
	0-1	010	B
	-01	010	C
2	011	110	D
	-11	100	E
3	111	101	F

2. etapp

gr.	abc	e	
0	000	111	G
	0-0	101	H
	00-	011	I



Minimeerimine – lihtimplikantide tabel ja vajalikud (liht)implikandid:

	abc	e	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	~~000~~	~~100~~							+	+	
	~~000~~	~~010~~							+		+
	~~000~~	~~001~~							+	+	+
	~~010~~	~~100~~	+							+	
	~~001~~	~~010~~		+	+						+
*	001	001									*
*	010	001								*	
	011	100	+			+	+				
	011	010		+		+					
*	101	010			*						
	~~111~~	~~100~~					+	+			
*	111	001						*			

abc	e	A	B	D	E	G
011	100	+		*	+	
011	010		+	*		

abc	e	o	
011	110	1	D
111	101	1	F
0-0	101	1	H
00-	011	1	I
-01	010	1	C

Tulemus MV-funktsioonina:

$$o(a,b,c,e)=a^0b^0c^0e^0+a^0b^1c^0e^0+a^0b^1c^1e^0+ +a^1b^1c^1e^0+a^0b^0c^0e^1+a^0b^0c^1e^1+ +a^0b^1c^1e^1+a^1b^0c^1e^1+a^0b^0c^0e^2+ +a^0b^0c^1e^2+a^0b^1c^0e^2+a^1b^1c^1e^2$$

abc	e	o
011	110	1
111	101	1
0-0	101	1
00-	011	1
-01	010	1

Lihtimplikandid:

$$o(a,b,c,e)=a^0b^1c^1e^{\{0,1\}}+a^1b^1c^1e^{\{0,2\}}+ +a^0b^{\{0,1\}}c^0e^{\{0,2\}}+a^0b^0c^{\{0,1\}}e^{\{1,2\}}+ +a^{\{0,1\}}b^0c^1e^1$$

Lihtimplikandid liiasuseta:

$$o(a,b,c,e)=a^0b^1c^1e^{\{0,1\}}+a^1b^1c^1e^{\{0,2\}}+ +a^0c^0e^{\{0,2\}}+a^0b^0e^{\{1,2\}}+b^0c^1e^1$$

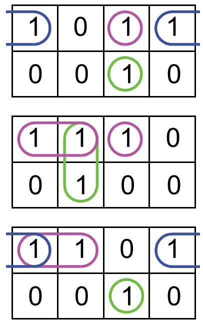
Tulemus kahendfunktsioonidena:

$$x(a,b,c) = \bar{a}\,b\,c + a\,b\,c + \bar{a}\,\bar{c}$$

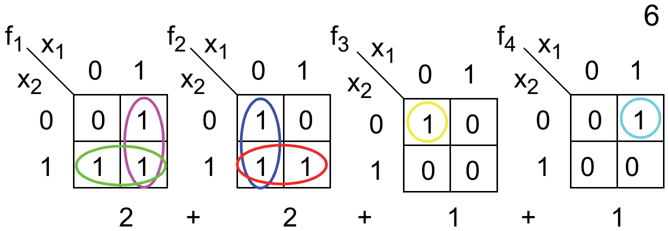
$$y(a,b,c) = \bar{a}\,b\,c + \bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}\,c$$

$$z(a,b,c) = a\,b\,c + \bar{a}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}$$

abc	xyz
011	110
111	101
0-0	101
00-	011
-01	010

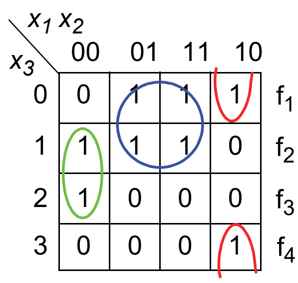


Näide #2 – neli 2-muutujafunktsiooni:



6 implikanti

3 implikanti



x_2x_1	$f_1f_2f_3f_4$
0 0	0 1 1 0
0 1	1 0 0 1
1 0	1 1 0 0
1 1	1 1 0 0

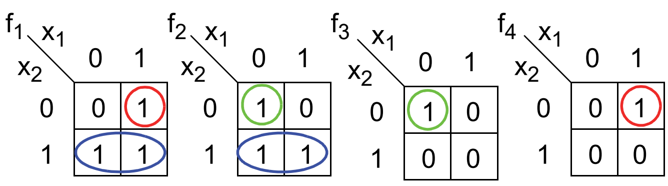
```
mintermid
gr. 21 1234
 0  00 0100 *
    00 0010 *
 1  01 1000 *
    01 0001 *
    10 1000 *
    10 0100 *
 2  11 1000 *
    11 0100 *
```

```
1. etapp
gr. 21 1234
 0  00 0110 A
    -0 0100 B
 1  01 1001 C
    10 1100 *
    -1 1000 D
    1- 1000 *
    1- 0100 *
 2  11 1100 *
```

```
2. etapp
gr. 21 1234
 1  1- 1100 E
```

```
lihtimplikandid
  21 1234  A B C D E
  00 0100  + +
* 00 0010  *
  01 1000      + +
* 01 0001      *
* 10 1000          *
  10 0100    +     +
  11 1000        + +
* 11 0100          *
```

3 implikanti, kõik olulised



Näide #3 – kaks 3-muutujafunktsiooni:

abc	xy
000	10
001	11
101	11
110	10
111	10

abc e	
000 10	1
001 11	1
101 11	1
110 10	1
111 10	1

mintermid

gr.	abc	e	
0	000	10	*
1	001	10	*
	001	01	*
2	101	10	*
	101	01	*
	110	10	*
3	111	10	*

1. etapp

gr.	abc	e	
0	00-	10	A
1	001	11	*
	-01	10	*
	-01	01	*
2	101	11	*
	1-1	10	B
	11-	10	C

2. etapp

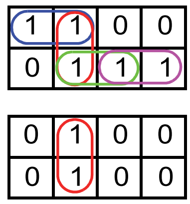
gr.	abc	e	
1	-01	11	D

lihtimplikandid

	abc e	A	B	C	D
*	000 10	*			
	~~001 10~~	+			+
*	001 01				*
	~~101 10~~		+		+
*	101 01				*
*	110 10			*	
	~~111 10~~		+	+	

abc	e	o	
00-	10	1	A
11-	10	1	C
-01	11	1	D

abc	xy
00-	10
11-	10
-01	11



Näide #4 – kolm 3-muutujafunktsiooni määramatustega:

abc	xyz
000	110
001	0-1
010	-0-
011	010
100	1-0
101	01-
110	101
111	-00

mintermid

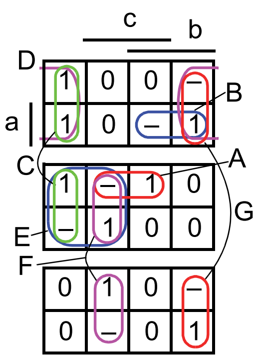
gr.	abc	e	
0	000	100	*
	000	010	*
1	*001	010	*
	001	001	*
	*010	100	*
	*010	001	*
	100	100	*
	*100	010	*
2	011	010	*
	101	010	*
	*101	001	*
	110	100	*
	110	001	*
3	*111	100	*

1. etapp

gr.	abc	e	
0	000	110	*
	0-0	100	*
	-00	100	*
	00-	010	*
	-00	010	*
1	001	011	*
	*010	101	*
	100	110	*
	0-1	010	A
	-01	010	*
	-01	001	*
	-10	100	*
	-10	001	*
	1-0	100	*
	10-	010	*
2	101	011	*
	110	101	*
	11-	100	B

2. etapp

gr.	abc	e	
0	-00	110	C
	--0	100	D
	-0-	010	E
1	-01	011	F
	-10	101	G



lihtimplikandid

0-1 010 A
11- 100 B
-00 110 C
--0 100 D
-0- 010 E
-01 011 F
-10 101 G

	abc e	A	B	C	D	E	F	G
	000 100			+	+			
	000 010			+		+		
*	001 001						*	
*	011 010	*						
	100 100			+	+			
	~~101 010~~					+	+	
	~~110 100~~		+		+			+
*	110 001							*

abc e	B	C	D	E
000 100		+	+	
000 010		+		+
100 100		+	+	

tulemus

abc	xyz	
0-0	010	A
-00	110	C
-01	011	F
-10	101	G

Näide #5 – heuristiline minimeerimine (1. kodutöö variant):

Millistest mintermidest alustada? Võrdlus oluliste lihtimplikantidega – leida need ‘1’-d, mis igal juhul peavad olema kaetud –> “üksikud ühed”, siis “paarid”, jne.

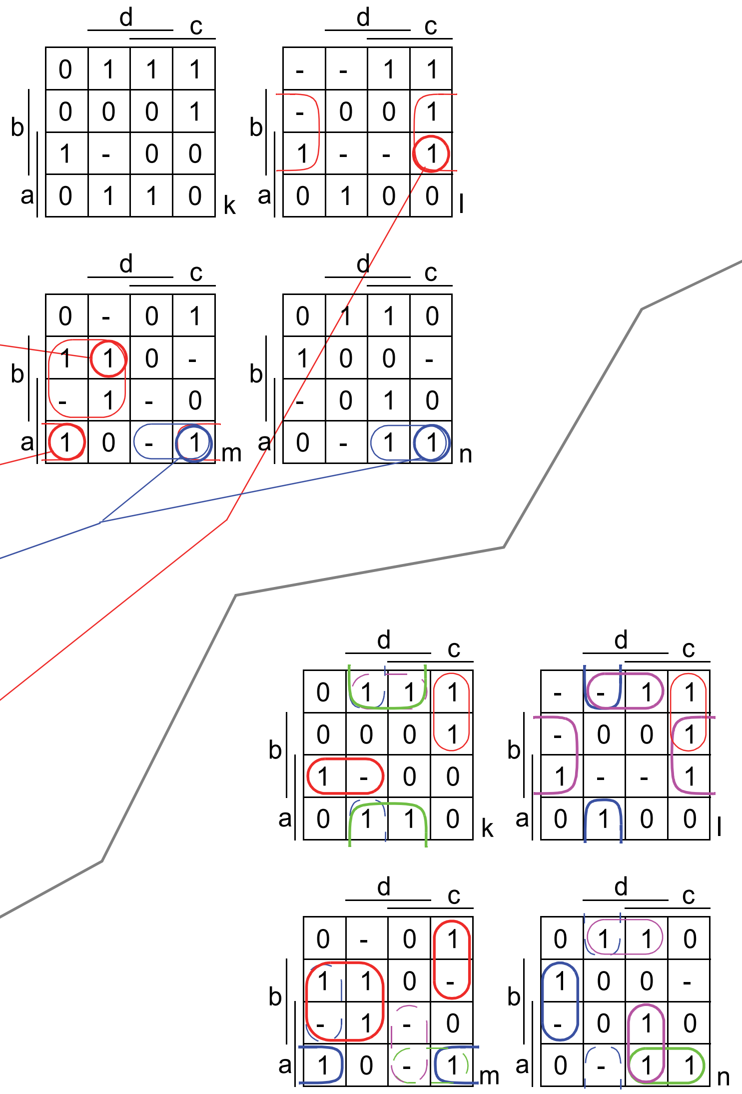
1) “üksikud ühed” – leida vastava väljundi katmiseks kõige suurem kontuur, et võimalikult palju ‘1’-d oleks kaetud.

2) “paarid” – leida mõlema väljundi katmiseks kõige suurem kontuur.

Edasi tuleks vaadelda need, mis veel katmata, alustades jälle sealt, kus on vähe ‘1’-i alles...

Eemaldada need, mis juba kaetud (punktiirjoonega). Variante on rohkemgi...

abcd	klmn
0000	0-00
0001	1--1
0010	1110
0011	1101
0100	0-11
0101	0010
0110	11--
0111	0000
1000	0010
1001	110-
1010	0011
1011	10-1
1100	11--
1101	--10
1110	0100
1111	0--1

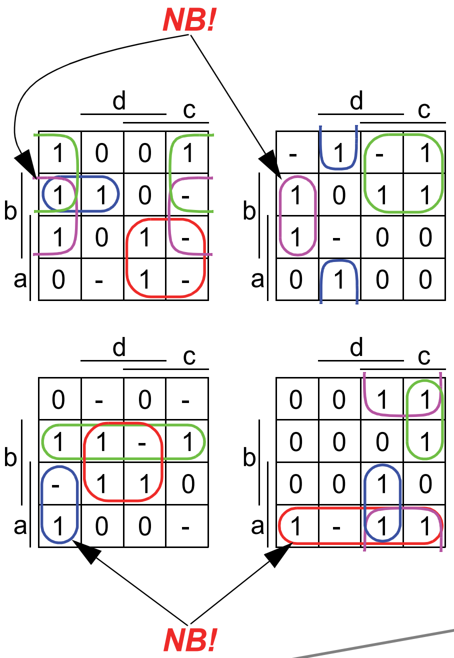


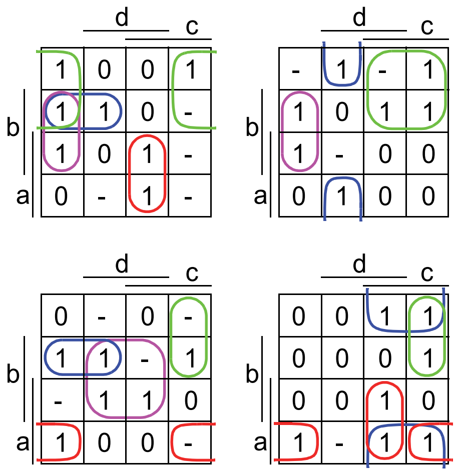
tulemus...

abcd	klmn
-10-	0010
10-0	0010
-1-0	0100
101-	0001
0-10	1110
-001	0100
00-1	0101
-0-1	1000
110-	1000
-100	0001
1-11	0001

Näide #6 – heuristiline minimeerimine (veel üks 1. kodutöö variant) – 14 vs. 10 implikanti:

abcd	klmn
0--0	1000
010-	1000
-1-0	1000
1-1-	1000
0-1-	0100
-001	0100
-100	0100
-1-1	0010
01--	0010
1-00	0010
-01-	0001
10--	0001
0-10	0001
1-11	0001





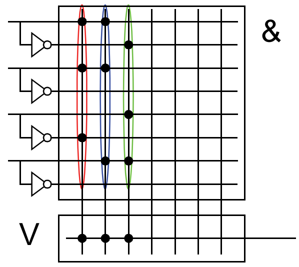
abcd	klmn
0--0	1000
010-	1010
-100	1100
1-11	1001
0-1-	0100
-001	0100
-1-1	0010
10-0	0011
0-10	0011
-01-	0001

11. MVL rakendusi

Efektiivsem kahendloogika probleemide lahendamine:
- kahendfunktsioonide süsteem (mitu väljundit) – väljundeid vaadeldakse kui ühte täiendavat mitmevalentset sisendit;
- sisendite, väljundite ja olekute kodeerimine (optimeerimine);
- dekoodriga PLM – sisendite paari vaadeldakse kui üht 4-valentset sisendit.
- testimine – kolmas väärtus kasutusel vea tähistamiseks

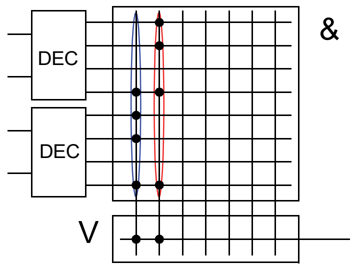
2nd PLA

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0



4nd PLA

y_2 \ y_1	0	1	3	2
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0
3	1	1	1	0
2	0	0	0	0



MV riistvara – rohkem kui kaks signaalinivood

Kasutusel on rohkem kui kaks diskreetset signaalinivood (pinge või vool), on võimalik kasutada olemasolevaid tehnoloogiaid – CMOS jne.

MVL eelised riistvaras – tüüpiline VLSI mikroskeem: ~70% pindalast ühendused, ~20% isolatsioon ja ainult ~10% transistorid.

- MVL süsteemid:
  - traadid kannavad rohkem informatsiooni – kokkuhoid nende arvus ja isolatsioonis;
  - väljaviigud kannavad rohkem informatsiooni – väiksem väljaviikude arv korpuse kohta.
- MVL võimaldab kiireid aritmeetikaoperatsioone, nt. kolmendaritmeetika.

MVL mälud

- 4-valentsed mälud (flash, DRAM)
  kahekordne salvestustihedus (transistori kohta).
- Mäluelementide põhiprobleemid:
  salvestamine ja lugemine;
  töökindlus - vajalikud kindlad vahed eri nivoode vahel;
  nivoo taastamine registrites.