Diskreetne matemaatika ja graafid – kordamine

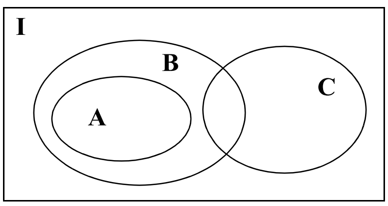
1. Hulgad (Sets)

- *hulk* on *elementide* (objektide) kogum   [Georg Cantor, 1845-1918]
- hulk – *set* ,   element – *element*, *member*
- $x \in A$ – element *x* kuulub hulka *A*
- $|A|$, $N(A)$ – hulga võimsus (kardinaalsus / cardinality)
- lõplikud (finite) ja lõpmatud (infinite) hulgad   /   loenduvad (countable) hulgad
- $P \subseteq Q$ – alamhulk (subset) – hulk P on on hulga Q alamhulk kui iga hulga P element on ka hulga Q element
- ühisosata (disjunktsed) hulgad (disjoint sets)
- tühihulk (empty set) – $\varnothing$,   universaalhulk (universal set) – I
- 2^A , $P(A)$ – astmehulk   (potentshulk / power set) – hulga A kõigi alamhulkade hulk

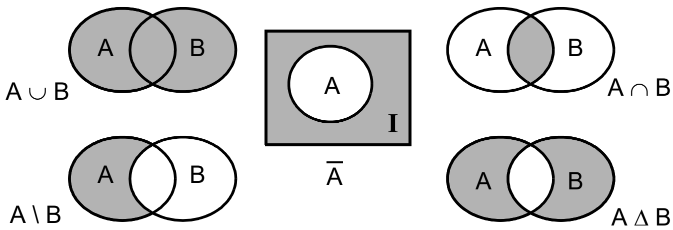
Tehted hulkadega

- $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \ \& \ b \in B \}$ – otsekorrutis (Descartes'i korrutis, Cartesian product)
  (a_1,a_2), $<a_1,a_2>$ - järjestatud paar (ordered pair, ordered 2-tuple)
- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ – hulkade ühend (unioin)
- $A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \& \ x \in B \}$ – hulkade ühisosa (lõige, intersection)
- $\overline{A} = \{ x \mid x \in I \ \& \ x \notin A \}$ – hulga täiend (complement, A^C)
- $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \ \& \ x \notin B \}$ – hulkade vahe (difference, relative complement),   ($\overline{A} = I \setminus A$)
- $A \,\Delta\, B = \{ x \mid (x \in A \ \& \ x \notin B) \vee (x \notin A \ \& \ x \in B) \}$ – hulkade sümmeetriline vahe

<u>Venn'i diagramm</u> [John Venn, 1834-1923]



$A \subseteq B$ $A \cap C = \varnothing$ $B \cap C \neq \varnothing$



Operatsioonide omadused

- Kommutatiivsus (vahetuvus, commutativity) $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
- Assotsiatiivsus (ühenduvus, associativity)
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributiivsus (jaotuvus, distributivity)
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- De Morgani seadused $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Idempotentsusseadus (idempotency) $A \cap A = A \cup A = A$
- Välistatud kolmanda seadused $A \cup \overline{A} = I$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- Topelttäiendi seadus $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap I = A$ $A \cup \varnothing = A$ $A \cup I = I$

- Neeldumisseadused

$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B \quad A \cap (A \cup B) = A \quad A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

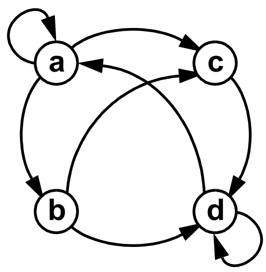
- Kleepimisseadused $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \quad (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Vastavused (Functions, Relations)

Antud 2 hulka A ja B ning reegel, kuidas hulga A elemendid on vastavuses φ hulga B elementidega – $\varphi \subseteq A \times B \quad \varphi : A \rightarrow B$

Binaarsuhted (Binary Relations)

- Vastavuse φ erijuhtu, kus lähte- ja sihthulk langevad kokku – $D(\varphi) = R(\varphi) = A$
- Tähistus – $R \subseteq AxA$
- Mugav interpreteerida suunatud graafina – hulga A elemendid vastavad tippudele, seosed elementide vahel vastavad kaartele
- Binaarmaatriks (naabrusmaatriks)



	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	0	1	1
c	0	0	0	1
d	1	0	0	1

Binaarsuhete *R* omadused	*Näitegraaf*
- Refleksiivsus (α_1) – ($\forall a \in A$ [$<a,a> \in R$])	*ei*
- Antirefleksiivsus (α_2) – ($\forall a \in A$ [$<a,a> \notin R$])	*ei*
- Suhe, mis ei täida nõudeid α_1 ega α_2, on mitterefleksiivne	*jah*
- Sümmeetria (α_3) – ($\forall a,b \in A$ [$<a,b> \in R \rightarrow <b,a> \in R$]), kus $a \neq b$	*ei*
- Antisümmeetria (α_4) – ($\forall a,b \in A$ [$<a,b> \in R \rightarrow <b,a> \notin R$]), kus $a \neq b$	*jah*
- Suhe, mis ei täida nõudeid α_3 ega α_4, on mittesümmeetriline	-
- Transitiivsus (α_5) – ($\forall a,b,c \in A$ [($<a,b> \in R$ & $<b,c> \in R$) $\rightarrow$ $<a,c> \in R$]), kus $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$	*ei*
- Antitransitiivsus (α_6) – ($\forall a,b,c \in A$ [($<a,b> \in R$ & $<b,c> \in R$) $\rightarrow$ $<a,c> \notin R$]), kus $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$	*ei*
- Suhe, mis ei täida nõudeid α_5 ega α_6, on mittetransitiivne	*jah*

2. Boole'i algebra

- Signatuur koosneb 2 binaarsest ja ühest unaarsest operatsioonist $(+,\bullet,\overline{\ })$
- + ja • on kommutatiivsed, assotsiatiivsed, idempotentsed ja teineteise suhtes distributiivsed
- Eksisteerivad elemendid 0 ja 1 nii, et $x \bullet \overline{x} = 0$ ning $x + \overline{x} = 1$

- **Näited:** $\{2^A, \cap, \cup, \overline{\ }\}$ – Cantori algebra / $\{(0,1)^n, \&, V, \overline{\ }\}$ – loogikaalgebra
- Kaks algebrat on isomorfsed ($A_1 = <M_1, S_1> \equiv A_2 = <M_2, S_2>$), kui eksisteerib üksühene vastavus φ nii, et φ: $(M_1 \cup S_1) \Leftrightarrow (M_2 \cap S_2)$, kus
  $f_i(m_{j1},...,m_{jk-1}) = m_{jk} \Leftrightarrow j(f_i)(j(m_{j1}),...,(j(m_{jk-1}))) = j(m_{jk})$,
  $m_{jl} \in M_1$, $j(m_{jl}) \in M_2$, $f_i \in S_1$, $j(f_i) \in S_2$
- Cantori algebra ja loogikaalgebra on isomorfsed

Loogikafunktsioonid

- $f(x_1, x_2, ... x_n)$, kus nii argumendid kui funktsiooni väärtus kuuluvad hulka {0,1}
- Iga loogikafunktsiooni võib esitada tõeväärtustabelina
- Erinevate loogikafunktsioonide $f(x_1, x_2, ... x_n)$ arv K on 2^{2^n}
- n=1 → K=4 ; n=2 → K=16 ; n=3 → K=256 ; n=4 → K=65536 ; n=5 → K=$4{,}3 \cdot 10^9$

Kõikvõimalikud kahe muutuja funktsioonid $f(x_1,x_2)$

a	*b*	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

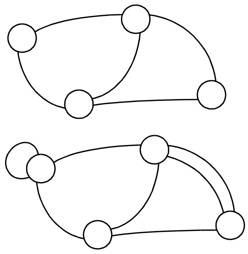
f_0 – konstant *0*
f_1 – konjunktsioon, $a\&b$ *ehk* $a \cdot b$ *ehk* ab
f_2 – implikatsiooni eitus $\overline{a \to b}$
f_3 – argumendi *a* väärtus
f_4 – pöördimplikatsiooni eitus $\overline{b \to a}$
f_5 – argumendi *b* väärtus
f_6 – summa mooduliga 2, $a \oplus b$
f_7 – disjunktsioon, $a \vee b$ *ehk* $a+b$
f_8 – Pierce'i funktsioon, $\overline{a} \vee \overline{b}$ *ehk* $a|b$
f_9 – samaväärsusfunktsioon, $a \leftrightarrow b$
f_{10} – argumendi inversioon $\overline{b}$
f_{11} – pöördimplikatsioon $b \to a$
f_{12} – argumendi inversioon $\overline{a}$
f_{13} – implikatsioon $a \to b$
f_{14} – Shefferi funktsioon, $\overline{a\&b}$ ehk $a \downarrow b$
f_{15} – konstant *1*

- Üldlevinud prioriteedid – $\overline{\ }$, &, ∨, →, ↔

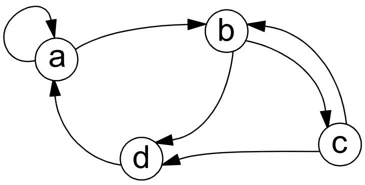
Loogika põhiseadused

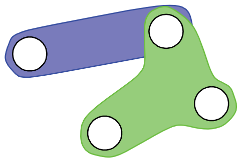
- Idempotentsus – $a\&a=a$ $a+a=a$
- Kommutatiivsus – $a\&b=b\&a$ $a+b=b+a$
- Assotsiatiivsus – $(a\&b)\&c=a\&(b\&c)$ $(a+b)+c=a+(b+c)$
- Distributiivsus – $a\&(b+c)=(a\&b)+(a\&c)$ $a+(b\&c)=(a+b)\&(a+c)$
- Topelteitus – $\overline{\overline{a}}=a$
- De Morgan – $\overline{a\&b}=\overline{a}+\overline{b}$ $\overline{a+b}=\overline{a}\&\overline{b}$
- Kleepimine – $(a\&b)+(a\&\overline{b})=a$ $(a+b)\&(a+\overline{b})=a$
- Neeldumine – $a+(a\&b)=a$ $a\&(a+b)=a$ $a+(\overline{a}\&b)=a+b$ $a\&(\overline{a}+b)=a\&b$
- Konstandid – $a+\overline{a}=1$ $a\&\overline{a}=0$ $a\&0=0$ $a+0=a$ $a\&1=a$ $a+1=1$
- Lisateisendusi – $a \to b=\overline{a}+b$ $a \oplus b=(a\&\overline{b})+(\overline{a}\&b)$ $a \leftrightarrow b=(a\&b)+(\overline{a}\&\overline{b})$

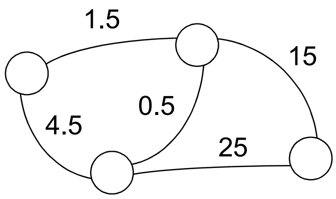
3. Graafid (Graphs)



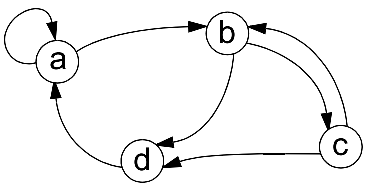
- Leonhard Euler (1707-1783), praktiline kasutus alles 1930. alates.
- *Graaf* (graph) – $G=(V,E)$
  $v_i \in V$ – *sõlmede* hulk [node, vertex (pl. vertices)]
  $e_n = \langle v_i,v_j \rangle \in E$ – *servade*/kaarte hulk [edge]
- *Silmus* (loop) – serv sõlmest iseendale
- *Multigraaf* (multigraph) – rohkem kui üks serv kahe sõlme vahel (mitmikserv / multpile edge)
- *Lihtne graaf* (simple graph) – puuduvad nii silmused kui ka mitmikservad
- *Orienteerimata graaf* (undirected graph) – sümmeetriline
- *Orienteeritud graaf* (suunatud graaf, directed graaf) – antisümmeetriline (servad)
- Sõlme *aste* (degree) – sõlmega seotud kaarte arv
- *Hüpergraaf* (hypergraph) – iga servaga võib olla seotud rohkem kui kaks sõlme
- *Kaalutud graaf* (weighted graph, network) – reaalarv seostatud servaga (sõlmega)

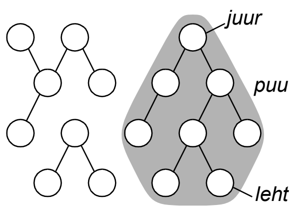




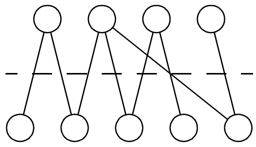
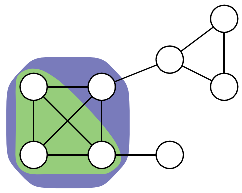
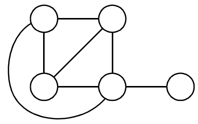


- *Käik* (walk) - sõlmede ja servade jada – (a, <a,a>, a, <a,b>, b, <b,c>, c, <c,b>, b, <b,c>, c)
- *Rada* (trail) - käik erinevate servadega – (a, <a,a>, a, <a,b>, b, <b,c>, c)
- *Tee* (path) - rada erinevate sõlmedega – (a, <a,b>, b, <b,c>, c, <c,d>, d)
- *Tsükkel* (cycle) - suletud käik erinevate sõlmedega – (a, <a,b>, b, <b,d>, d, <d,a>)
- *Sidus graaf* (connected graph) - $\forall\ v_i,v_j \in N\ \exists\ path(v_i,v_j)$,
- *Mets* (forest) / atsükliline graaf (acyclic graph) – graaf ilma tsükliteta
- *Puu* (tree) – sidus atsükliline graaf – juur (root) & leht (leaf/leaves)

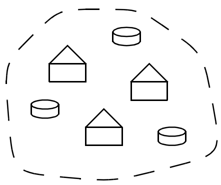
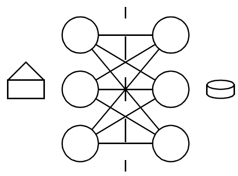
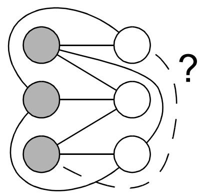


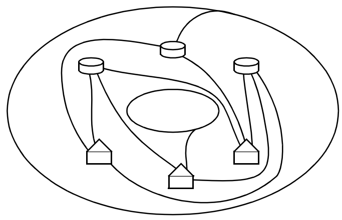


- *Täielik graaf* (complete graph) – iga kahe sõlme vahel on kaar
- *Bikromaatiline graaf* (bipartite graph) – sõlmed on võimalik jagada kahte rühma selliselt, et iga serva üks otstest on ühes ja teine otstest on teises sõlmede rühmas
- Graafi *täiend* (complement) – $G^{-1}=(V,E^{-1})$, e. $E^{-1}=\{ \langle v_i,v_j \rangle \mid \langle v_i,v_j \rangle \notin E \}$
- *Alamgraaf* (subgraph) – $G_S=(V_S,E_S)$, $V_S \subseteq V$ & $E_S \subseteq E$
- *Klikk* (clique) – täielik alamgraaf
- Maksimaalne klikk – klikk, mis ei sisaldu üheski teises klikis
  (mõned autorid nimetavad ainult maksimaalseid alamgraafe klikkideks)
- Planaarne graaf (tasandgraaf, planar graph) – kujutades tasandil ükski serv ei lõiku
- Isomorfsed graafid – üksühene vastavus sõlmede ja servade hulkade vahel

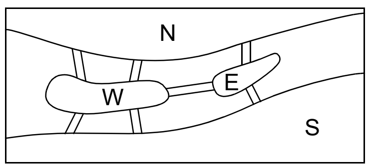




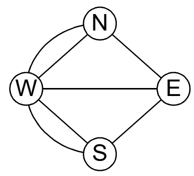
Näiteülesanne #1 – 3 kaevu & 3 maja, igas majast rada iga kaevuni?
Bikromaatiline graaf – kas see graaf on planaarne? Ei ole, vaja on kõrgemat järku pinda!

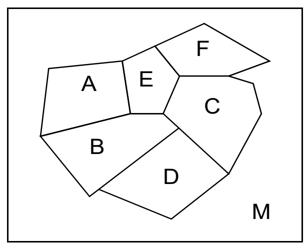


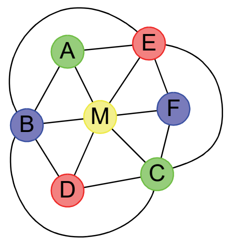
Näiteülesanne #2 – Köningsbergi sillad (L. Euler 1736)
On 2 saart & 7 silda – ületada iga sild täpselt üks kord, kas see on võimalik?
Ei ole, sest saarele jõudmisel peab olema võimalik ka lahkuda – vaja on paaris arvu sildu (sõlme aste paarisarv).



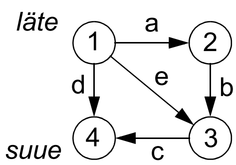


Näiteülesanne #3 – poliitilise kaardi värvimine
Planaarse graafi värvimine – mitu värvi on vaja?
Piisab neljast värvist (tõestatud).





Suunatud graafid - sisendaste (indegree) & väljundaste (outdegree) –
sõlme sisenevate & sõlmest väljuvate kaarte arv
alusgraaf (underlying graph) – sõlmede ja kaarte hulk sama, kuid puudub orienteeritus
Suunatud atsükliliste graafid (directed acyclic graphs, DAGs) – osaliselt järjestatud hulk
järglane (successor, descendant) – v_j on järglane v_i-le kui $\exists$ *path*(v_i,v_j)
eellane (predecessor, ancestor), otsene järglane, otsene eellane
polaarne s.a.g. (polar dag) – $\exists$ läte (source) & suue (sink) (≡võre)
- Intsidentsusmaatriks (incidence matrix) – |V| rida & |E| veergu
- Naabrusmaatriks (adjacency matrix) – |V| rida & veergu



	a	b	c	d	e
1	-1	0	0	-1	-1
2	1	-1	0	0	0
3	0	1	-1	0	1
4	0	0	1	1	0

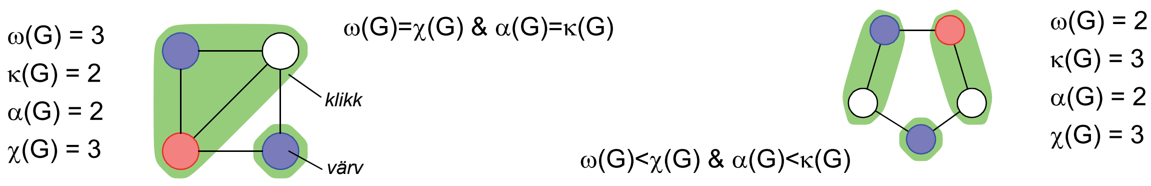
	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

Perfektsed graafid (perfect graphs)

- klikiarv (clique number) – $\omega(G)$ – suurima kliki suurus
- tükeldus klikkideks – G on *tükeldatud* täielikeks mittekattuvateks alamgraafideks
- klikikate (clique cover) – G on *kaetud* täielike alamgraafidega
- klikikattearv (clique cover number) – $\kappa(G)$ – minimaalse klikikatte (-tükelduse) võimsus
- stabiilne hulk (stable set) – sõlmed hulgas ei ole kaarega ühendatud
- stabiilsusarv (stability number) – $\alpha(G)$ – suurima stabiilse hulga suurus
- graafi värvimine (coloring) – graafi tükeldamine stabiilseteks hulkadeks
- kromaatiline arv (chromatic number) – $\chi(G)$ – minimaalse stabiilseteks hulkadeks tükelduse võimsus

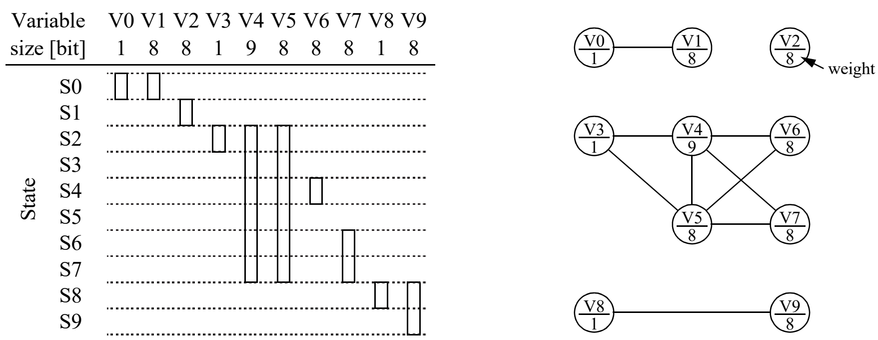
Graafi perfektsus

- tavaliselt – $\omega(G) \leq \chi(G)$ ehk $\alpha(G) \leq \kappa(G)$
- perfektsed graafid – $\omega(G) = \chi(G)$ ehk $\alpha(G) = \kappa(G)$



Kõõlgraafid (kolmnurk graafid, chordal graphs) – iga tsükkel rohkem kui kolmest sõlmest omab kõõlu (chord)

Intervallgraafid (interval graphs) – sõlmed on võimalik seada vastavusse vahemikega selliselt, et kahe sõlme vahel on kaar, kui kaks intervalli kattuvad

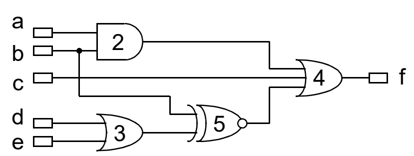


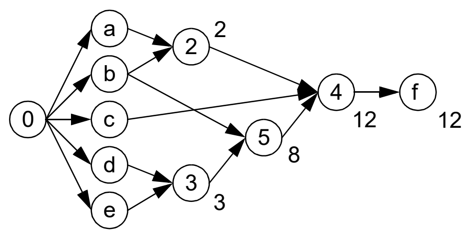
4. Graafid digitaalsüsteemide disainis

Disaini ülesanne #1 – viite leidmine ahelas

pikima tee ülesanne (ainult atsüklilised graafid)

- sõlm – loogikaelement, sõlme kaal – viide
- kaar – ühendused loogikaelementide vahel



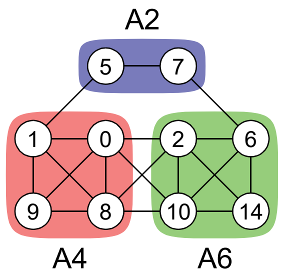


Disaini ülesanne #2 – lihtimplikantide hulga minimeerimine

minimaalse klikikatte leidmine graafil

- sõlm – oluline ('1') sisendvektorid (minterm)
- klikk – lihtimplikant (võimalus asendada hüperservadega)

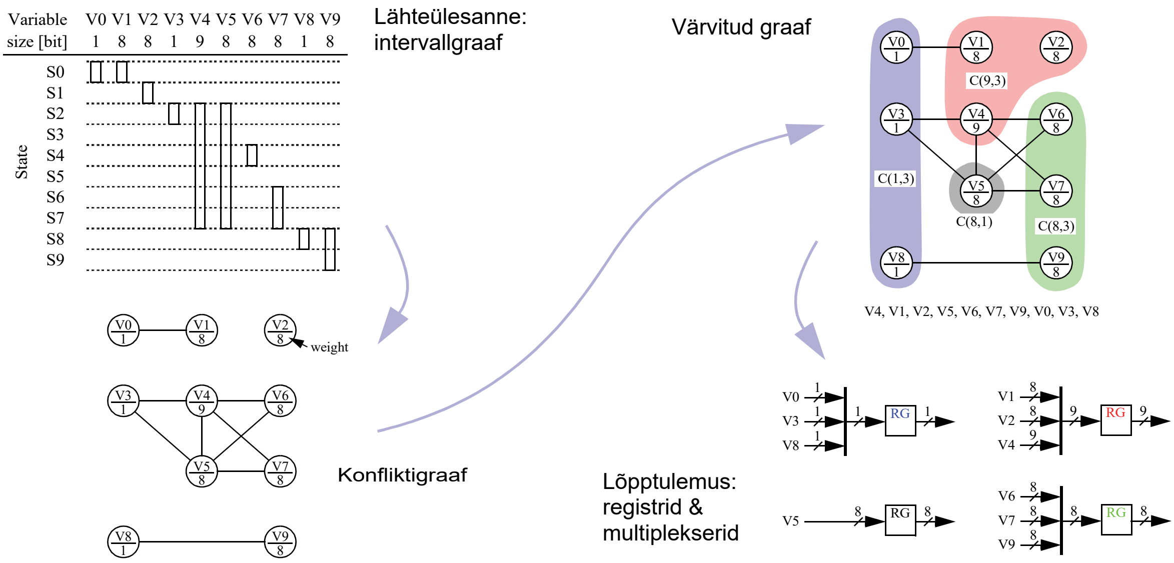
Impl.	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
A1		x		x						
A2				x		x				
A3					x	x				
A4	x	x					x	x		
A5	x		x				x		x	
A6			x		x				x	x



Disaini ülesanne #3 – registrite sidumine

kaalutud (intervall)graafi *värvimine*

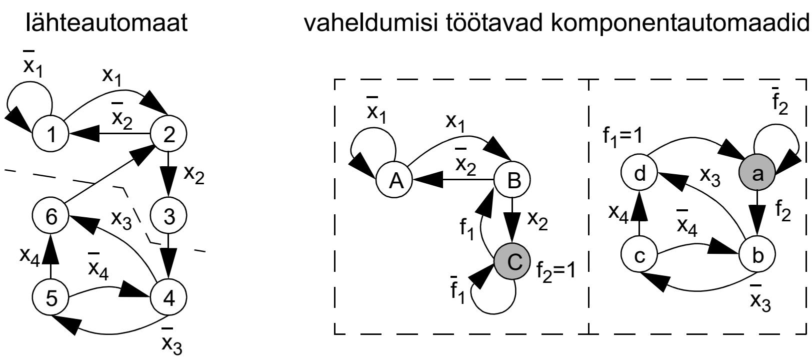
- sõlm – register, kaar – registrid on korraga kasutuses (intervallid kattuvad)



Disaini ülesanne #4 – algoritmi (automaadi) tükeldamine

kaalutud graafi *tükeldamine*

- sõlm – olek, kaar – siire + tingimused + sagedused/tõenäosused



5. Algoritmid ja keerukus

Algoritmi keerukus – kui kaua kulub aega ja kui palju on vaja resursse?

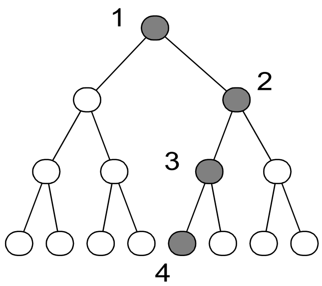
Keerukus – $O(n)$, $O(n^2)$, $O(2^n)$, jne.

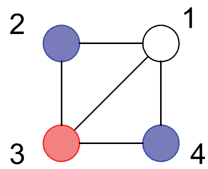
- polünomiaalne keerukus – *P*
- mitte-polünomiaalne keerukus – *NP*
  lahenduv polünomiaalse ajaga, kui on võimalik õige tulemus <u>ära arvata</u>
- kas $P \subseteq NP$ või $P = NP$ on siiani lahendamata!

Harude ja tõkete meetod (branch and bound method) – parim tulemus

Ahne meetod (greedy method) – piisavalt hea tulemus?

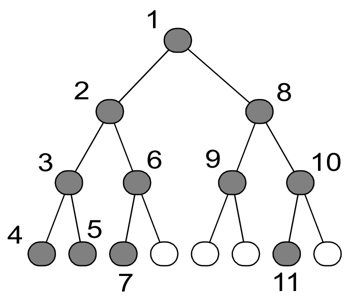
Ahne meetod





- Vali jooksev objekt
  - suurim, väikseim, juhuslik jne.
  - vali värvimata sõlm
- Teosta operatsioon
  - sidumine, eraldamine, värvimine jne.
  - vali legaalne värv
- Korda kuni operatsioonid on sooritatud kõikide objektidega
  - korda kuni kõik sõlmed on värvitud

Harude ja tõkete meetod



- Vali jooksev objekt
  - mis on antud kombinatsiooni korral veel kasutamata
  - vali värvimata sõlm
- Teosta operatsioon
  - sidumine, eraldamine, värvimine jne.
  - vali legaalne värv
- Kui vahetulemus on halvem jooksvast parimast, siis alusta uut kombinatsiooni
- Korda kuni operatsioonid on sooritatud kõigi objektidega
  - korda kuni kõik sõlmed on värvitud
- Jäta jooksev parim tulemus meelde
- Alusta uut kombinatsiooni