Diferentsiaalvõrrandid

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.
Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku. Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit harilikuks diferentsiaalvõrrandiks (HDV). Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks (ODV).

1. järku HDV üldkuju on järgmine:

$$F(x, y, y') = 0,$$

kus $F(x, u, v)$ on kolme muutuja funktsioon.
Kui võrrandis on kõrgeimat järku tuletis teiste liikmete kaudu avaldatud, siis see võrrand on normaalkujul. Seega on 1. järku HDV normaalkuju järgmine:

$$y' = f(x, y),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.
n. järku HDV üldkuju ja normaalkuju on vastavalt

$$F(x, y, y' y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ja

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

kus F ja f on vastavalt $n+2-$ ja $n+1-$muutuja funktsioonid.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid. Üldiselt $n-$järku võrrandi lahend sõltub n konstandist.
$n-$järku HDV üldlahendiks nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. Erilahendiks nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel.
Diferentsiaalvõrrandi erilahendi graafikut nimetatakse selle võrrandi integraalkõveraks. Seega võib $n-$järku HDV üldlahendit geomeetriliselt tõlgendada kui $n-$parameetrist sõltuvat integraalkõverate parve.

Vaatleme normaalkujulist $n-$järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub n parameetrist $C_1, \ldots, C_n$, st omab n vabadusastet. Erilahendi määramiseks on vaja järelikult lisada sellele võrrandile n lisatingimust.

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0^0, \\ y^{(1)}(x_0) = y_0^1, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

Seda ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks $n-$järku HDV-le. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.
Esineb ka ülesandeid, kus lisatingimused konstantide määramiseks on antud mitmes punktis. Sellisel juhul räägitakse rajaülesandest.

Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja y_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathrm{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ ja otsitakse ülesande lahendi y lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve $y_1, y_2, y_3, \ldots$ nii, et $y_i \approx y(x_i)$.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.

Euleri meetod

$$uy_{i+1} = uy_i + hf(x_i, y_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\right).$$

Meetod on teist järku.

Keskpunkti meetod

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.
Runge-Kutta meetod

$$y_{i+1} = y_i + c_1 hf(x_i, y_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, y_i + \beta hf(x_i, y_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.
Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.

$k-$järku Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 F_1 + c_2 F_2 + \ldots + c_k F_k,$$

kus

$$F_1 = hf(x_i, u_i),$$

$$F_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, u_i + \beta_{21} F_1),$$

$$F_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, u_i + \beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2),$$

$$\ldots$$

$$F_k = hf(x_i + \alpha_k h, u_i + \beta_{k1} F_1 + \beta_{k2} F_2 + \ldots + b_{k,k-1} F_{k-1}).$$