Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x,y)$ *nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul*

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : \; a < x < b, \; \alpha < y < \beta\}.$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y): \ a < x < b, \ \alpha < y < \beta\}.$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : \ a < x < b, \ \alpha < y < \beta\}.$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : \ a < x < b, \ \alpha < y < \beta\}.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).

Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \ \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \qquad (2)$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx + C(y)\right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx + C(y)\right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx + C(y)\right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx + C(y)\right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$$

Tähistame

$$\phi(x,y) := N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x,y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame
$$\phi(x,y) := N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$
Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x,y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] =$$
$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$
Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x,y) := N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x,y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x,y) := N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x,y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x,y) := N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x,y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

$$C(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx \right] dy + C_1$$

Seega

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx \right] dy + C_1.$$

Tarvilik ja piisav tingimus on tõestatud.

$$C(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right] dy + C_1$$

Seega

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right] dy + C_1.$$

Tarvilik ja piisav tingimus on tõestatud.

Võimalikke lahendusviise on kolm:

1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.

Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.

2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.

3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.

Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.

2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.

3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x,y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M - \frac{\partial\mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x,y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x,y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \tag{4}$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x, y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N}dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

- Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mid \cdot\frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N}dx.$$

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$. Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y,\ \ \omega = xy,\ \ \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)} d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N\right) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)} d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y, \;\; \omega = xy, \;\; \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.
Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.

Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.

Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.

Näide 1: Lahendada

$$(\frac{y^2}{2} + 2ye^x)dx + (y + e^x)dy = 0.$$

Meil $M(x,y) = \frac{y^2}{2} + 2ye^x$ ja $N(x,y) = y + e^x$.Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right) = y + 2e^x,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y + e^x) = e^x.$$

Näide 1: Lahendada

$$\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right)dx + (y + e^x)dy = 0.$$

Meil $M(x, y) = \frac{y^2}{2} + 2ye^x$ ja $N(x, y) = y + e^x$. Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right) = y + 2e^x,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y + e^x) = e^x.$$

Näide 1: Lahendada

$$(\frac{y^2}{2} + 2ye^x)dx + (y + e^x)dy = 0.$$

Meil $M(x, y) = \frac{y^2}{2} + 2ye^x$ ja $N(x, y) = y + e^x$.Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right) = y + 2e^x,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y + e^x) = e^x.$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{e^x - y - 2e^x}{-(y + e^x)} dx = \frac{-(y + e^x)}{-(y + e^x)} dx = 1 \cdot dx.$$

Siit saame leida integreeruvusteguri

$$\mu = e^{\int dx} = e^x.$$

Korrutame võrrandi läbi, saame eksaktse võrrandi

$$(\frac{y^2}{2} e^x + 2ye^{2x})dx + (e^x y + e^{2x})dy = 0.$$

Tõepoolest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = ye^x + 2e^{2x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} N = ye^x + 2e^{2x}.$$

$$u(x, y) = \int (\frac{y^2}{2} e^x + 2ye^{2x})dx + C(y) =$$

$$= \frac{y^2}{2} e^x + 2y\frac{1}{2} e^{2x} + C(y) = \frac{y^2}{2} e^x + ye^{2x} + C(y),$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial\mu}{\mu} = \frac{e^x - y - 2e^x}{-(y+e^x)}dx = \frac{-(y+e^x)}{-(y+e^x)}dx = 1 \cdot dx.$$

Siit saame leida integreeruvusteguri

$$\mu = e^{\int dx} = e^x.$$

Korrutame võrrandi läbi, saame eksaktse võrrandi

$$(\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x})dx + (e^x y + e^{2x})dy = 0.$$

Tõepoolest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = ye^x + 2e^{2x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}N = ye^x + 2e^{2x}.$$

$$u(x,y) = \int(\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x})dx + C(y) =$$

$$= \frac{y^2}{2}e^x + 2y\frac{1}{2}e^{2x} + C(y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C(y),$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{e^x - y - 2e^x}{-(y+e^x)}dx = \frac{-(y+e^x)}{-(y+e^x)}dx = 1 \cdot dx.$$

Siit saame leida integreeruvusteguri

$$\mu = e^{\int dx} = e^x.$$

Korrutame võrrandi läbi, saame eksaktse võrrandi

$$(\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x})dx + (e^x y + e^{2x})dy = 0.$$

Tõepoolest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = ye^x + 2e^{2x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}N = ye^x + 2e^{2x}.$$

$$u(x,y) = \int (\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x})dx + C(y) =$$

$$= \frac{y^2}{2}e^x + 2y\frac{1}{2}e^{2x} + C(y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C(y),$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{e^x - y - 2e^x}{-(y + e^x)} dx = \frac{-(y + e^x)}{-(y + e^x)} dx = 1 \cdot dx.$$

Siit saame leida integreeruvusteguri

$$\mu = e^{\int dx} = e^x.$$

Korrutame võrrandi läbi, saame eksaktse võrrandi

$$(\frac{y^2}{2} e^x + 2ye^{2x})dx + (e^x y + e^{2x})dy = 0.$$

Tõepoolest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = ye^x + 2e^{2x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} N = ye^x + 2e^{2x}.$$

$$u(x, y) = \int (\frac{y^2}{2} e^x + 2ye^{2x})dx + C(y) =$$

$$= \frac{y^2}{2} e^x + 2y \frac{1}{2} e^{2x} + C(y) = \frac{y^2}{2} e^x + ye^{2x} + C(y),$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{e^x - y - 2e^x}{-(y + e^x)} dx = \frac{-(y + e^x)}{-(y + e^x)} dx = 1 \cdot dx.$$

Siit saame leida integreeruvusteguri

$$\mu = e^{\int dx} = e^x.$$

Korrutame võrrandi läbi, saame eksaktse võrrandi

$$(\frac{y^2}{2} e^x + 2ye^{2x})dx + (e^x y + e^{2x})dy = 0.$$

Tõepoolest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = ye^x + 2e^{2x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} N = ye^x + 2e^{2x}.$$

$$u(x, y) = \int (\frac{y^2}{2} e^x + 2ye^{2x})dx + C(y) =$$

$$= \frac{y^2}{2} e^x + 2y\frac{1}{2} e^{2x} + C(y) = \frac{y^2}{2} e^x + ye^{2x} + C(y),$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{e^x - y - 2e^x}{-(y + e^x)}dx = \frac{-(y + e^x)}{-(y + e^x)}dx = 1 \cdot dx.$$

Siit saame leida integreeruvusteguri

$$\mu = e^{\int dx} = e^x.$$

Korrutame võrrandi läbi, saame eksaktse võrrandi

$$(\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x})dx + (e^x y + e^{2x})dy = 0.$$

Tõepoolest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = ye^x + 2e^{2x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}N = ye^x + 2e^{2x}.$$

$$u(x, y) = \int (\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x})dx + C(y) =$$

$$= \frac{y^2}{2}e^x + 2y\frac{1}{2}e^{2x} + C(y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C(y),$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{e^x - y - 2e^x}{-(y + e^x)} dx = \frac{-(y + e^x)}{-(y + e^x)} dx = 1 \cdot dx.$$

Siit saame leida integreeruvusteguri

$$\mu = e^{\int dx} = e^x.$$

Korrutame võrrandi läbi, saame eksaktse võrrandi

$$(\frac{y^2}{2} e^x + 2ye^{2x})dx + (e^x y + e^{2x})dy = 0.$$

Tõepoolest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = ye^x + 2e^{2x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} N = ye^x + 2e^{2x}.$$

$$u(x, y) = \int (\frac{y^2}{2} e^x + 2ye^{2x})dx + C(y) =$$

$$= \frac{y^2}{2} e^x + 2y\frac{1}{2} e^{2x} + C(y) = \frac{y^2}{2} e^x + ye^{2x} + C(y),$$

teisalt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C(y)\right) = e^x y + e^{2x}.$$

$$ye^x + e^{2x} + C'(y) = e^x y + e^{2x}$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = C_1.$$

Seega

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C_1.$$

teisalt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C(y)\right) = e^x y + e^{2x}.$$

$$ye^x + e^{2x} + C'(y) = e^x y + e^{2x}$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = C_1.$$

Seega

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C_1.$$

teisalt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C(y)\right) = e^x y + e^{2x}.$$

$$ye^x + e^{2x} + C'(y) = e^x y + e^{2x}$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = C_1.$$

Seega

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C_1.$$

teisalt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C(y)\right) = e^x y + e^{2x}.$$

$$ye^x + e^{2x} + C'(y) = e^x y + e^{2x}$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = C_1.$$

Seega

$$u(x, y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C_1.$$

Näide 2: Lahendada

$$(xy-1)dx + x^2dy = 0.$$

Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N = 2x.$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(xy)$. Siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2x - x}{-\left(yx^2 - x(xy-1)\right)}d\omega = -1 \cdot d\omega.$$

Seega $\mu = e^{\int(-1)d\omega} = e^{-\omega} = e^{-xy}$. Korrutame nüüd esialgse võrrandi mõlemat poolt integreeruvusteguriga, siis

$$(xy-1)e^{-xy}dx + x^2e^{-xy}dy = 0.$$

Näide 2: Lahendada

$$(xy-1)dx + x^2dy = 0.$$

Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N = 2x.$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(xy)$. Siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2x - x}{-\left(yx^2 - x(xy-1)\right)}d\omega = -1 \cdot d\omega.$$

Seega $\mu = e^{\int(-1)d\omega} = e^{-\omega} = e^{-xy}$. Korrutame nüüd esialgse võrrandi mõlemat poolt integreeruvusteguriga, siis

$$(xy-1)e^{-xy}dx + x^2e^{-xy}dy = 0.$$

Näide 2: Lahendada

$$(xy - 1)dx + x^2 dy = 0.$$

Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N = 2x.$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(xy)$. Siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2x - x}{-\left(yx^2 - x(xy - 1)\right)} d\omega = -1 \cdot d\omega.$$

Seega $\mu = e^{\int(-1)d\omega} = e^{-\omega} = e^{-xy}$. Korrutame nüüd esialgse võrrandi mõlemat poolt integreeruvusteguriga, siis

$$(xy - 1)e^{-xy} dx + x^2 e^{-xy} dy = 0.$$

Näide 2: Lahendada

$$(xy-1)dx + x^2dy = 0.$$

Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N = 2x.$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(xy)$. Siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2x - x}{-\left(yx^2 - x(xy-1)\right)}d\omega = -1 \cdot d\omega.$$

Seega $\mu = e^{\int(-1)d\omega} = e^{-\omega} = e^{-xy}$. Korrutame nüüd esialgse võrrandi mõlemat poolt integreeruvusteguriga, siis

$$(xy-1)e^{-xy}dx + x^2e^{-xy}dy = 0.$$

Näide 2: Lahendada

$$(xy-1)dx + x^2 dy = 0.$$

Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N = 2x.$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(xy)$. Siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2x - x}{-\left(yx^2 - x(xy-1)\right)} d\omega = -1 \cdot d\omega.$$

Seega $\mu = e^{\int (-1) d\omega} = e^{-\omega} = e^{-xy}$. Korrutame nüüd esialgse võrrandi mõlemat poolt integreeruvusteguriga, siis

$$(xy-1)e^{-xy} dx + x^2 e^{-xy} dy = 0.$$

Saadud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = 2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N = 2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy}.$$

$$u(x,y) = \int x^2e^{-xy}dy + C(x) = \frac{x^2}{-x}e^{-xy} + C(x),$$

samas aga

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-xe^{-xy} + C(x)\right) = (xy-1)e^{-xy}$$

$$-e^{-xy} + xye^{-xy} + C'(x) = xye^{-xy} - e^{-xy}$$

$$C'(x) = 0, \quad C(x) = C_1$$

$$u(x,y) = -xe^{-xy} + C_1.$$

Saadud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = 2xe^{-xy} - x^2 ye^{-xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N = 2xe^{-xy} - x^2 ye^{-xy}.$$

$$u(x, y) = \int x^2 e^{-xy} dy + C(x) = \frac{x^2}{-x} e^{-xy} + C(x),$$

samas aga

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-xe^{-xy} + C(x)\right) = (xy - 1)e^{-xy}$$

$$-e^{-xy} + xye^{-xy} + C'(x) = xye^{-xy} - e^{-xy}$$

$$C'(x) = 0, \quad C(x) = C_1$$

$$u(x, y) = -xe^{-xy} + C_1.$$

Saadud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = 2xe^{-xy} - x^2 ye^{-xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N = 2xe^{-xy} - x^2 ye^{-xy}.$$

$$u(x, y) = \int x^2 e^{-xy} dy + C(x) = \frac{x^2}{-x} e^{-xy} + C(x),$$

samas aga

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-xe^{-xy} + C(x)\right) = (xy - 1)e^{-xy}$$

$$-e^{-xy} + xye^{-xy} + C'(x) = xye^{-xy} - e^{-xy}$$

$$C'(x) = 0, \quad C(x) = C_1$$

$$u(x, y) = -xe^{-xy} + C_1.$$

Saadud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = 2xe^{-xy} - x^2 ye^{-xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N = 2xe^{-xy} - x^2 ye^{-xy}.$$

$$u(x, y) = \int x^2 e^{-xy} dy + C(x) = \frac{x^2}{-x} e^{-xy} + C(x),$$

samas aga

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-xe^{-xy} + C(x)\right) = (xy - 1)e^{-xy}$$

$$-e^{-xy} + xye^{-xy} + C'(x) = xye^{-xy} - e^{-xy}$$

$$C'(x) = 0, \quad C(x) = C_1$$

$$u(x, y) = -xe^{-xy} + C_1.$$

Saadud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = 2xe^{-xy} - x^2 ye^{-xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N = 2xe^{-xy} - x^2 ye^{-xy}.$$

$$u(x, y) = \int x^2 e^{-xy} dy + C(x) = \frac{x^2}{-x} e^{-xy} + C(x),$$

samas aga

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-xe^{-xy} + C(x)\right) = (xy - 1)e^{-xy}$$

$$-e^{-xy} + xye^{-xy} + C'(x) = xye^{-xy} - e^{-xy}$$

$$C'(x) = 0, \quad C(x) = C_1$$

$$u(x, y) = -xe^{-xy} + C_1.$$

Saadud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y} M = 2xe^{-xy} - x^2 y e^{-xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N = 2xe^{-xy} - x^2 y e^{-xy}.$$

$$u(x, y) = \int x^2 e^{-xy} dy + C(x) = \frac{x^2}{-x} e^{-xy} + C(x),$$

samas aga

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-xe^{-xy} + C(x)\right) = (xy - 1)e^{-xy}$$

$$-e^{-xy} + xye^{-xy} + C'(x) = xye^{-xy} - e^{-xy}$$

$$C'(x) = 0, \;\; C(x) = C_1$$

$$u(x, y) = -xe^{-xy} + C_1.$$

Saadud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = 2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N = 2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy}.$$

$$u(x,y) = \int x^2e^{-xy}dy + C(x) = \frac{x^2}{-x}e^{-xy} + C(x),$$

samas aga

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-xe^{-xy} + C(x)\right) = (xy-1)e^{-xy}$$

$$-e^{-xy} + xye^{-xy} + C'(x) = xye^{-xy} - e^{-xy}$$

$$C'(x) = 0, \quad C(x) = C_1$$

$$u(x,y) = -xe^{-xy} + C_1.$$

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siisl avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siisl avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:

1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.

Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siisl avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siisl avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siisl avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.

Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siisl avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siisl avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siisl avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y.

Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y. Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y.
Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y. Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y.
Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y.
Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

ning alumise seose põhjal

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp.$$

Kahe seose põhjal saame

$$pdx = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp$$

ehk

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - p \right) dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp = 0.$$

ning alumise seose põhjal

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp.$$

Kahe seose põhjal saame

$$pdx = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp$$

ehk

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - p \right) dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp = 0.$$

ning alumise seose põhjal

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp.$$

Kahe seose põhjal saame

$$p dx = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp$$

ehk

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - p \right) dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp = 0.$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

ning

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp = 0.$$

Võrrandi üldlahend

$$x = h(y, \xi(y, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = h(\xi(p, C), p) \\ y = \xi(p, C). \end{cases}$$

ning

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp = 0.$$

Võrrandi üldlahend

$$x = h(y, \xi(y, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = h(\xi(p, C), p) \\ y = \xi(p, C). \end{cases}$$

ning

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp = 0.$$

Võrrandi üldlahend

$$x = h(y, \xi(y, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = h(\xi(p, C), p) \\ y = \xi(p, C). \end{cases}$$

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v),\ \ \psi(u, v),\ \ \chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v), \ \ \psi(u, v), \ \ \chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right),$$

millest

$$\left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) du + \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u,v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \chi(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u,v)du + N(u,v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Lahend on kujul $u = \tau(v, C)$ või $v = \omega(u, C)$. Lõppvastuseks seega saame

$$\begin{cases} x = \varphi\left(\tau(v, C), v\right) \\ y = \psi\left(\tau(v, C), v\right) \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, \omega(u, C)\right) \\ y = \psi\left(u, \omega(u, C)\right). \end{cases}$$

Sellist üleminekut esialgselt võrrandilt nimetatakse parametriseerimiseks kahe parameetri abil.

Lahend on kujul $u = \tau(v, C)$ või $v = \omega(u, C)$. Lõppvastuseks seega saame

$$\begin{cases} x = \varphi\left(\tau(v, C), v\right) \\ y = \psi\left(\tau(v, C), v\right) \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, \omega(u, C)\right) \\ y = \psi\left(u, \omega(u, C)\right). \end{cases}$$

Sellist üleminekut esialgselt võrrandilt nimetatakse parametriseerimiseks kahe parameetri abil.

Lahend on kujul $u = \tau(v, C)$ või $v = \omega(u, C)$. Lõppvastuseks seega saame

$$\begin{cases} x = \varphi\left(\tau(v, C), v\right) \\ y = \psi\left(\tau(v, C), v\right) \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, \omega(u, C)\right) \\ y = \psi\left(u, \omega(u, C)\right). \end{cases}$$

Sellist üleminekut esialgselt võrrandilt nimetatakse parametriseerimiseks kahe parameetri abil.

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$

Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = v^2 du + 2v(u+1)dv, \quad dy = vdx$$

$$v^2 du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = v^2 du + 2v(u+1)dv, \quad dy = vdx$$

$$v^2 du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = v^2 du + 2v(u+1)dv, \quad dy = vdx$$

$$v^2 du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = v^2 du + 2v(u+1)dv, \quad dy = vdx$$

$$v^2 du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = v^2 du + 2v(u+1)dv, \quad dy = vdx$$

$$v^2 du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = v^2du + 2v(u+1)dv, \quad dy = vdx$$

$$v^2du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$. Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral. Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$.

Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral.

Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$. Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral.

Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$. Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral. Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$. Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral. Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$.
Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral.
Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

Parameetrite ellimineerimisel saame

$$y = 0, \;\; y = x + 1, \;\; y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$$

Kui $C = 0$, siis on üldlahendi seosega antud ka $y = x + 1$. Seega on lahendiks $y = 0$ ja $y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$.

Parameetrite ellimineerimisel saame

$$y = 0, \;\; y = x + 1, \;\;\; y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$$

Kui $C = 0$, siis on üldlahendi seosega antud ka $y = x + 1$. Seega on lahendiks $y = 0$ ja $y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$.

Parameetrite ellimineerimisel saame

$$y = 0, \quad y = x + 1, \quad y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$$

Kui $C = 0$, siis on üldlahendi seosega antud ka $y = x + 1$. Seega on lahendiks $y = 0$ ja $y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$.

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand.Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand.Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand. Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand.Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand.Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand.Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand.Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\,dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\,dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\,dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Kui $\varphi(v) \neq v$, on Lagrange'i võrrandi üldlahend kujul

$$\begin{cases} x = u(v, C) \\ y = u(v, C)\varphi(v) + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) = v$, siis on võrrand kujul

$$y = xy' + \psi(y').$$

Sellist võrrandit nimetatakse **Clairaut' võrrandiks**. Ka Clairaut' võrrandi lahendamiseks kasutatakse parametriseerimist

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) \neq v$, on Lagrange'i võrrandi üldlahend kujul

$$\begin{cases} x = u(v, C) \\ y = u(v, C)\varphi(v) + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) = v$, siis on võrrand kujul

$$y = xy' + \psi(y').$$

Sellist võrrandit nimetatakse **Clairaut' võrrandiks**. Ka Clairaut' võrrandi lahendamiseks kasutatakse parametriseerimist

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) \neq v$, on Lagrange'i võrrandi üldlahend kujul

$$\begin{cases} x = u(v, C) \\ y = u(v, C)\varphi(v) + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) = v$, siis on võrrand kujul

$$y = xy' + \psi(y').$$

Sellist võrrandit nimetatakse **Clairaut' võrrandiks.** Ka Clairaut' võrrandi lahendamiseks kasutatakse parametriseerimist

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) \neq v$, on Lagrange'i võrrandi üldlahend kujul

$$\begin{cases} x = u(v, C) \\ y = u(v, C)\varphi(v) + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) = v$, siis on võrrand kujul

$$y = xy' + \psi(y').$$

Sellist võrrandit nimetatakse **Clairaut' võrrandiks.** Ka Clairaut' võrrandi lahendamiseks kasutatakse parametriseerimist

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv + \psi(v) \end{cases}$$

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\,dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \big[u + \psi'(v)\big] = vdu,$$

millest

$$\big[u + \psi'(v)\big] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.