Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse ***juhuslikuks suuruseks****.*

Definitsioon

Juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on lõplik või loenduv, nimetatakse ***diskreetseks juhuslikuks suuruseks****.*

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse ***juhuslikuks suuruseks****.*

Definitsioon

Juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on lõplik või loenduv, nimetatakse ***diskreetseks juhuslikuks suuruseks****.*

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse ***juhuslikuks suuruseks****.*

Definitsioon

Juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on lõplik või loenduv, nimetatakse ***diskreetseks juhuslikuks suuruseks****.*

Definitsioon

Funktsiooni $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$ *nimetatakse juhusliku suuruse* X ***jaotusfunktsiooniks***.

Lause

Kui $F(x)$ *on juhusliku suuruse jaotusfunktsioon, siis*

- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;
- $F(x)$ *on mittekahanev;*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- *kui* $\alpha < \beta$, *siis* $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Pidevad juhuslikud suurused

Definitsioon

Juhuslikku suurust, mille jaotusfunktsioon on pidev hulgal R, *nimetatakse* ***pidevaks juhuslikuks suuruseks***.

Järeldus

Pidev juhuslik suurus omandab iga väärtuse tõenäosusega 0.

Tõestus.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=a) &= \lim_{x\to a+} \mathrm{P(a \leqslant X < x)} = \lim_{x\to a+} (F(x) - F(a)) \\ & \quad \textbf{X on pidev js., järelikult $F(x)$ on pidev} \\ &= F(a) - F(a) = 0 \end{aligned}$$

Pidevad juhuslikud suurused

Definitsioon

Juhuslikku suurust, mille jaotusfunktsioon on pidev hulgal $\mathbb{R}$, nimetatakse ***pidevaks juhuslikuks suuruseks****.*

Järeldus

Pidev juhuslik suurus omandab iga väärtuse tõenäosusega 0.

Tõestus.

$$\begin{aligned} P(X = a) &= \lim_{x \to a+} P(a \leqslant X < x) = \lim_{x \to a+} (F(x) - F(a)) \\ & \quad \text{X on pidev js., järelikult $F(x)$ on pidev} \\ &= F(a) - F(a) = 0 \end{aligned}$$

Pidevad juhuslikud suurused

Definitsioon

Juhuslikku suurust, mille jaotusfunktsioon on pidev hulgal $\mathbb{R}$*, nimetatakse* ***pidevaks juhuslikuks suuruseks****.*

Järeldus

Pidev juhuslik suurus omandab iga väärtuse tõenäosusega 0*.*

Tõestus.

$$\begin{aligned} P(X=a) &= \lim_{x\to a+} P(a \leqslant X < x) = \lim_{x\to a+}(F(x)-F(a)) \\ &\ \textbf{X on pidev js., järelikult $F(x)$ on pidev} \\ &= F(a)-F(a)=0 \end{aligned}$$

Järeldus

Kui X on pidev juhuslik suurus ja $\alpha < \beta$, siis

$$\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = \mathrm{P}(\alpha < X \leqslant \beta) = \mathrm{P}(\alpha < X < \beta) = \mathrm{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta).$$

Jaotustihedus

Definitsioon

Funktsiooni

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\mathrm{P}(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X **jaotustiheduseks**.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\mathrm{P}(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) \end{aligned}$$

juhul, kui see piirväärtus eksisteerib!

Jaotustihedus

Definitsioon

Funktsiooni

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\mathrm{P}(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***jaotustiheduseks***.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\mathrm{P}(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) \end{aligned}$$

juhul, kui see piirväärtus eksisteerib!

Lause

Kehtivad seosed:

$$\begin{aligned}
f(x) &= F'(x) \\
f(x) &\geqslant 0 \\
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 1 \\
\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \quad (\alpha < \beta).
\end{aligned}$$

Pideva juhusliku suuruse arvkarakteristikud

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx, \\
\mathrm{D}X &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathrm{E}X)^2 f(x)dx, \\
\nu_n &= \mathrm{E}(X^n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx, \\
\mu_n &= \mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathrm{E}X)^n f(x)dx
\end{aligned}
$$

Definitsioon

Pideva juhusliku suuruse ***mediaaniks*** *nimetatakse arvu, mille korral*

$$P\{X \leq MeX\} = P\{X \geq MeX\} \geq \frac{1}{2}$$

Definitsioon

Pideva juhusliku suuruse ***moodiks*** *nimetatakse selle suuruse sellist võimalikku väärtust, millel selle suuruse jaotustihedusel on lokaalne maksimum.*

Definitsioon

Pideva juhusliku suuruse ***mediaaniks*** *nimetatakse arvu, mille korral*

$$P\{X \leq MeX\} = P\{X \geq MeX\} \geq \frac{1}{2}$$

Definitsioon

Pideva juhusliku suuruse ***moodiks*** *nimetatakse selle suuruse sellist võimalikku väärtust, millel selle suuruse jaotustihedusel on lokaalne maksimum.*

Kvantiilid

Pideva juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon on mittekahanev ja pidev. Tingimustest $F(-\infty) = 0$ ja $F(+\infty) = 1$ ning funktsiooni $F(x)$ pidevusest saame, et $F(x)$ väärtuste hulk on lõik $[0, 1]$ (**NB! Kehtib ainult pideva juhusliku suuruse korral!**).

Definitsioon

Arvu x_p, mis on määratud tingimusega

$$\mathrm{P}(X < x_p) = p, \quad 0 < p < 1,$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X p–**kvantiiliks**.*

Definitsioon

*Juhusliku suuruse X $0,5$-kvantiili nimetatakse selle suuruse **mediaaniks**.*

Kvantiilid

Pideva juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon on mittekahanev ja pidev. Tingimustest $F(-\infty) = 0$ ja $F(+\infty) = 1$ ning funktsiooni $F(x)$ pidevusest saame, et $F(x)$ väärtuste hulk on lõik $[0, 1]$ (**NB! Kehtib ainult pideva juhusliku suuruse korral!**).

Definitsioon

Arvu x_p, mis on määratud tingimusega

$$\mathrm{P}(X < x_p) = p, \quad 0 < p < 1,$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X p–**kvantiiliks**.*

Definitsioon

*Juhusliku suuruse X $0,5$-kvantiili nimetatakse selle suuruse **mediaaniks**.*

Ühtlane jaotus

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub lõigul $[a, b]$ ***ühtlasele jaotusele****, kui selle jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & kui\ x \in [a, b]; \\ 0, & kui\ x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Tähistatakse $X \sim U(a, b)$.

$$\mathrm{E}X = \frac{b+a}{2}, \quad \mathrm{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ühtlane jaotus

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub lõigul $[a, b]$ ***ühtlasele jaotusele****, kui selle jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & kui\ x \in [a, b]; \\ 0, & kui\ x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Tähistatakse $X \sim U(a, b)$.

$$\mathrm{E}X = \frac{b+a}{2}, \ \ \mathrm{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ühtlane jaotus

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub lõigul $[a, b]$ ***ühtlasele jaotusele****, kui selle jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \textit{kui } x \in [a, b]; \\ 0, & \textit{kui } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Tähistatakse $X \sim U(a, b)$.

$$\mathrm{E}X = \frac{b+a}{2}, \quad \mathrm{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ühtlane jaotus

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub lõigul $[a, b]$ ***ühtlasele jaotusele****, kui selle jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{kui } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{kui } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Tähistatakse $X \sim U(a, b)$.

$$\mathrm{E}X = \frac{b+a}{2}, \quad \mathrm{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Normaaljaotus

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub ***normaaljaotusele*** *parameetritega a ja $\sigma > 0$, kui selle jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Tähistatakse $X \sim N(a, \sigma)$.

$$\mathrm{E}X = a, \ \ \mathrm{D}X = \sigma^2$$

Normaaljaotus

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub ***normaaljaotusele*** *parameetritega a ja $\sigma > 0$, kui selle jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Tähistatakse $X \sim N(a, \sigma)$.

$$\mathrm{E}X = a, \;\; \mathrm{D}X = \sigma^2$$

Normaaljaotus

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub ***normaaljaotusele*** *parameetritega a ja $\sigma > 0$, kui selle jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Tähistatakse $X \sim N(a, \sigma)$.

$$\mathrm{E}X = a, \quad \mathrm{D}X = \sigma^2$$

Normaaljaotus

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub ***normaaljaotusele*** *parameetritega a ja $\sigma > 0$, kui selle jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Tähistatakse $X \sim N(a, \sigma)$.

$$\mathrm{E}X = a, \;\; \mathrm{D}X = \sigma^2$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),} \quad \text{kus} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

kus $\Phi(x)$ on **Laplace'i funktsioon**.

Omadused:

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$

ja $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1/2$.

$$\boxed{\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),} \quad \text{kus} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

kus $\Phi(x)$ on **Laplace'i funktsioon**.

Omadused:

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$

ja $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1/2$.

$$\boxed{\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),} \quad \text{kus} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

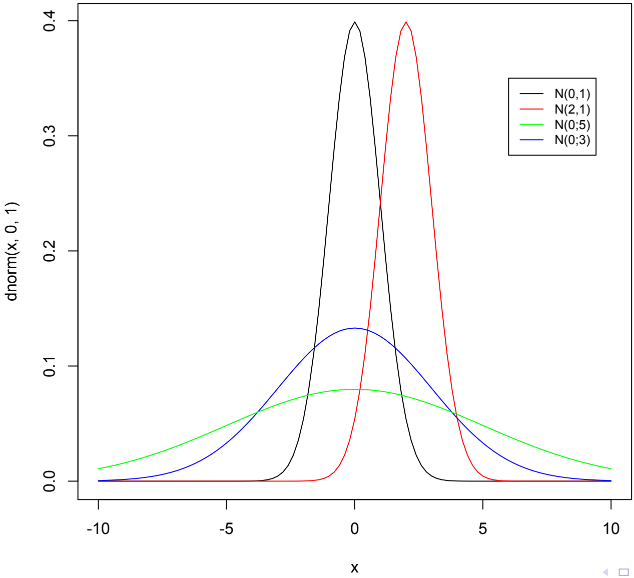
kus $\Phi(x)$ on **Laplace'i funktsioon**.

Omadused:

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$

ja $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1/2$.

$$\boxed{\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)}$$


N(0,1)
N(2,1)
N(0;5)
N(0;3)
dnorm(x, 0, 1)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-10
-5
0
5
10
x

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub ***eksponentjaotusele*** *parameetriga $\lambda > 0$, kui selle juhusliku suuruse jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Tähistatakse $X \sim E(\lambda)$.

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}, \;\; \mathrm{D}X = \frac{1}{\lambda^2}$$

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub ***eksponentjaotusele*** *parameetriga $\lambda > 0$, kui selle juhusliku suuruse jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Tähistatakse $X \sim E(\lambda)$.

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}, \ \mathrm{D}X = \frac{1}{\lambda^2}$$

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub ***eksponentjaotusele*** *parameetriga $\lambda > 0$, kui selle juhusliku suuruse jaotustihedus avaldub kujul*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Tähistatakse $X \sim E(\lambda)$.

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}, \ \ \mathrm{D}X = \frac{1}{\lambda^2}$$