Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

*Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse **juhuslikuks suuruseks**.*

Näide 1. Mündi viskamine. $X = 0$, kui tulemuseks on *kiri*, $X = 1$, kui tulemuseks on *vapp*.
Näide 2. Täringu veeretamine. $X = k$, $k \in \{1, \ldots, 6\}$, st tulemuseks on k silma.
Näide 3. Ruumi temperatuuri mõõtmine teatud ajahetkel. $X = t$, kus t on termomeetrilt loetud näit.

Definitsioon

*Väärtusi x, mida juhuslik suurus X võib katse käigus omandada, nimetatakse selle **juhusliku suuruse võimalikeks väärtusteks**.*

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse ***juhuslikuks suuruseks****.*

Näide 1. Mündi viskamine. $X = 0$, kui tulemuseks on *kiri*, $X = 1$, kui tulemuseks on *vapp*.
Näide 2. Täringu veeretamine. $X = k$, $k \in \{1, \ldots, 6\}$, st tulemuseks on k silma.
Näide 3. Ruumi temperatuuri mõõtmine teatud ajahetkel. $X = t$, kus t on termomeetrilt loetud näit.

Definitsioon

Väärtusi x, mida juhuslik suurus X võib katse käigus omandada, nimetatakse selle ***juhusliku suuruse võimalikeks väärtusteks****.*

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

*Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse **juhuslikuks suuruseks**.*

Näide 1. Mündi viskamine. $X = 0$, kui tulemuseks on *kiri*, $X = 1$, kui tulemuseks on *vapp*.

Näide 2. Täringu veeretamine. $X = k$, $k \in \{1, \dots, 6\}$, st tulemuseks on k silma.

Näide 3. Ruumi temperatuuri mõõtmine teatud ajahetkel. $X = t$, kus t on termomeetrilt loetud näit.

Definitsioon

*Väärtusi x, mida juhuslik suurus X võib katse käigus omandada, nimetatakse selle **juhusliku suuruse võimalikeks väärtusteks**.*

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse ***juhuslikuks suuruseks****.*

Näide 1. Mündi viskamine. $X = 0$, kui tulemuseks on *kiri*, $X = 1$, kui tulemuseks on *vapp*.
Näide 2. Täringu veeretamine. $X = k$, $k \in \{1, \ldots, 6\}$, st tulemuseks on k silma.
Näide 3. Ruumi temperatuuri mõõtmine teatud ajahetkel. $X = t$, kus t on termomeetrilt loetud näit.

Definitsioon

Väärtusi x, mida juhuslik suurus X võib katse käigus omandada, nimetatakse selle ***juhusliku suuruse võimalikeks väärtusteks****.*

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse ***juhuslikuks suuruseks****.*

Näide 1. Mündi viskamine. $X = 0$, kui tulemuseks on *kiri*, $X = 1$, kui tulemuseks on *vapp*.
Näide 2. Täringu veeretamine. $X = k$, $k \in \{1, \dots, 6\}$, st tulemuseks on k silma.
Näide 3. Ruumi temperatuuri mõõtmine teatud ajahetkel. $X = t$, kus t on termomeetrilt loetud näit.

Definitsioon

Väärtusi x, mida juhuslik suurus X võib katse käigus omandada, nimetatakse selle ***juhusliku suuruse võimalikeks väärtusteks****.*

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

*Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse **juhuslikuks suuruseks**.*

Näide 1. Mündi viskamine. $X = 0$, kui tulemuseks on *kiri*, $X = 1$, kui tulemuseks on *vapp*.
Näide 2. Täringu veeretamine. $X = k$, $k \in \{1, \ldots, 6\}$, st tulemuseks on k silma.
Näide 3. Ruumi temperatuuri mõõtmine teatud ajahetkel. $X = t$, kus t on termomeetrilt loetud näit.

Definitsioon

*Väärtusi x, mida juhuslik suurus X võib katse käigus omandada, nimetatakse selle **juhusliku suuruse võimalikeks väärtusteks**.*

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

Juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on lõplik või loenduv, nimetatakse ***diskreetseks juhuslikuks suuruseks****.*

Definitsioon

Kui diskreetse juhusliku suuruse X korral on teada tema võimalike väärtuste hulk $\{x_i\}_{i\in I}$, kus I on lõplik või loenduv hulk, ja tõenäosused

$$p_i = \mathrm{P}(X = x_i)_{i\in I} \quad \left(\sum_{i\in I} p_i = 1\right),$$

millega juhuslik suurus X iga neist võimalikest väärtustest omandab, siis öeldakse, et on antud diskreetse juhusliku suuruse X ***jaotusseadus****.*

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon

Juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on lõplik või loenduv, nimetatakse ***diskreetseks juhuslikuks suuruseks****.*

Definitsioon

Kui diskreetse juhusliku suuruse X korral on teada tema võimalike väärtuste hulk $\{x_i\}_{i \in I}$, kus I on lõplik või loenduv hulk, ja tõenäosused

$$p_i = \mathrm{P}(X = x_i)_{i \in I} \quad \left(\sum_{i \in I} p_i = 1 \right),$$

millega juhuslik suurus X iga neist võimalikest väärtustest omandab, siis öeldakse, et on antud diskreetse juhusliku suuruse X ***jaotusseadus****.*

Definitsioon

Funktsiooni $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$ nimetatakse juhusliku suuruse X ***jaotusfunktsiooniks****.*

Lause

Kui $F(x)$ on juhusliku suuruse jaotusfunktsioon, siis

- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;
- *$F(x)$ on mittekahanev;*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- *kui $\alpha < \beta$, siis $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.*

Definitsioon

Funktsiooni $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$ *nimetatakse juhusliku suuruse* X ***jaotusfunktsiooniks***.

Lause

Kui $F(x)$ *on juhusliku suuruse jaotusfunktsioon, siis*

- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;
- $F(x)$ *on mittekahanev;*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- *kui* $\alpha < \beta$, *siis* $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Heaviside'i funktsioon:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{kui } x > 0. \end{cases}$$

Lause

Kui $\{x_k\}_{k\in I}$ on diskreetse juhusliku suuruse X võimalike väärtuste hulk ja $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, kus $\sum_{k\in I} p_k = 1$, siis selle suuruse jaotusfunktsioon on esitatav kujul

$$F(x) = \sum_{k\in I} p_k H(x - x_k).$$

Lause

Diskreetse juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon $F(x)$ on igas punktis $x \in \mathrm{R}$ pidev vasakult.

Heaviside'i funktsioon:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{kui } x > 0. \end{cases}$$

Lause

Kui $\{x_k\}_{k\in I}$ on diskreetse juhusliku suuruse X võimalike väärtuste hulk ja $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, kus $\sum_{k\in I} p_k = 1$, siis selle suuruse jaotusfunktsioon on esitatav kujul

$$F(x) = \sum_{k\in I} p_k H(x - x_k).$$

Lause

Diskreetse juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon $F(x)$ on igas punktis $x \in \mathrm{R}$ pidev vasakult.

Juhusliku suuruse arvkarakteristikud

Definitsioon

Kui $\{x_k\}_{k\in I}$ *on diskreetse juhusliku suuruse* X *võimalike väärtuste hulk ja* $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, *siis kindlat suurust*

$$\mathrm{E}X = \sum_{k\in I} x_k p_k$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***keskväärtuseks****.*

Definitsioon

Kaht juhuslikku suurust nimetatakse ***sõltumatuteks****, kui ühe jaotus ei sõltu sellest, millise võimaliku väärtuse omandab katsel teine juhuslik suurus.*

Lause

Juhusliku suuruse X keskväärtusel $\mathrm{E}X$ on järgmised omadused:

- *kui $X = C$ on kindel suurus, siis $\mathrm{E}C = C$;*
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$;
- *kui X ja Y on sõltumatud, siis $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$;*
- $\mathrm{E}(C \cdot X) = C \cdot \mathrm{E}X$.

Definitsioon

Kaht juhuslikku suurust nimetatakse ***sõltumatuteks****, kui ühe jaotus ei sõltu sellest, millise võimaliku väärtuse omandab katsel teine juhuslik suurus.*

Lause

Juhusliku suuruse X keskväärtusel $\mathrm{E}X$ on järgmised omadused:

- *kui $X = C$ on kindel suurus, siis $\mathrm{E}C = C$;*
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$;
- *kui X ja Y on sõltumatud, siis $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$;*
- $\mathrm{E}(C \cdot X) = C \cdot \mathrm{E}X$.

Definitsioon

Arvu

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X **dispersiooniks**.*

Definitsioon

Arvu

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}X}$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X **standardhälbeks**.*

Lause

Kui X on diskreetne juhuslik suurus ja $\{x_k\}_{k\in I}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ning $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, siis

$$\mathrm{D}X = \sum_{k\in I} (x_k - \mathrm{E}X)^2 p_k.$$

Definitsioon

Arvu

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***dispersiooniks****.*

Definitsioon

Arvu

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}X}$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***standardhälbeks****.*

Lause

Kui X on diskreetne juhuslik suurus ja $\{x_k\}_{k\in I}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ning $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, siis

$$\mathrm{D}X = \sum_{k\in I} (x_k - \mathrm{E}X)^2 p_k.$$

Definitsioon

Arvu

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***dispersiooniks****.*

Definitsioon

Arvu

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}X}$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***standardhälbeks****.*

Lause

Kui X on diskreetne juhuslik suurus ja $\{x_k\}_{k\in I}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ning $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, siis

$$\mathrm{D}X = \sum_{k\in I} (x_k - \mathrm{E}X)^2 p_k.$$

Lause

Juhusliku suuruse X dispersioonil $\mathrm{D}X$ on järgmised omadused:

- $\mathrm{D}C = 0$;
- $\mathrm{D}(CX) = C^2\mathrm{D}X$;
- $\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2$.
- $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y + 2\mathrm{E}((X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y))$;
- *kui X ja Y on sõltumatud, siis* $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

Definitsioon

Arvu

$$\nu_n = \mathrm{E}(X^n) \quad (n \geqslant 1)$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X n–**järku algmomendiks**.*

Definitsioon

Arvu

$$\mu_n = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^n \quad (n \geqslant 1)$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X n–**järku keskmomendiks**.*

Lause

Kui X on diskreetne juhuslik suurus ja $\{x_k\}_{k\in I}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ning $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, siis

$$\nu_n = \sum_{k\in I} x_k^n \cdot p_k, \quad \mu_n = \sum_{k\in I} (x_k - \mathrm{E}X)^n \cdot p_k.$$

Definitsioon

Arvu

$$\nu_n = \mathrm{E}(X^n) \quad (n \geqslant 1)$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X n–**järku algmomendiks**.*

Definitsioon

Arvu

$$\mu_n = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^n \quad (n \geqslant 1)$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X n–**järku keskmomendiks**.*

Lause

Kui X on diskreetne juhuslik suurus ja $\{x_k\}_{k \in I}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ning $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k \in I}$, siis

$$\nu_n = \sum_{k \in I} x_k^n \cdot p_k, \quad \mu_n = \sum_{k \in I} (x_k - \mathrm{E}X)^n \cdot p_k.$$

Definitsioon

Arvu

$$\nu_n = \mathrm{E}(X^n) \quad (n \geqslant 1)$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X n–**järku algmomendiks**.*

Definitsioon

Arvu

$$\mu_n = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^n \quad (n \geqslant 1)$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X n–**järku keskmomendiks**.*

Lause

Kui X on diskreetne juhuslik suurus ja $\{x_k\}_{k \in I}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ning $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k \in I}$, siis

$$\nu_n = \sum_{k \in I} x_k^n \cdot p_k, \quad \mu_n = \sum_{k \in I} (x_k - \mathrm{E}X)^n \cdot p_k.$$

Definitsioon

Arvu

$$\mathrm{As}X = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{X} - \mathrm{EX})^3}{(\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2)^{3/2}}$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***asümmeetriakordajaks****.*

Definitsioon

Arvu

$$\mathrm{Ex}X = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***ekstsessikordajaks****.*

Definitsioon

Arvu

$$\mathrm{As}X = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{X} - \mathrm{EX})^3}{(\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2)^{3/2}}$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***asümmeetriakordajaks****.*

Definitsioon

Arvu

$$\mathrm{Ex}X = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

nimetatakse juhusliku suuruse X ***ekstsessikordajaks****.*

Definitsioon

Arvu x_p, mis on määratud tingimusega

$$\mathrm{P}(X < x_p) = p, \quad 0 < p < 1,$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X p–**kvantiiliks**.*

Definitsioon

*Juhusliku suuruse X $0,5$-kvantiili nimetatakse selle suuruse **mediaaniks**.*

Definitsioon

*Diskreetse juhusliku suuruse **moodiks** nimetatakse selle suuruse sellist võimalikku väärtust, mille omandamise tõenäosus on suurim.*

Definitsioon

Arvu x_p, mis on määratud tingimusega

$$\mathrm{P}(X < x_p) = p, \quad 0 < p < 1,$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X p–**kvantiiliks**.*

Definitsioon

*Juhusliku suuruse X $0,5$-kvantiili nimetatakse selle suuruse **mediaaniks**.*

Definitsioon

*Diskreetse juhusliku suuruse **moodiks** nimetatakse selle suuruse sellist võimalikku väärtust, mille omandamise tõenäosus on suurim.*

Definitsioon

Arvu x_p, mis on määratud tingimusega

$$\mathrm{P}(X < x_p) = p, \quad 0 < p < 1,$$

*nimetatakse juhusliku suuruse X p–**kvantiiliks**.*

Definitsioon

*Juhusliku suuruse X $0,5$-kvantiili nimetatakse selle suuruse **mediaaniks**.*

Definitsioon

*Diskreetse juhusliku suuruse **moodiks** nimetatakse selle suuruse sellist võimalikku väärtust, mille omandamise tõenäosus on suurim.*

Bernoulli (katsete) skeem: n–sõltumatust katsest koosnev katseseeria, kus sündmus A toimub igal katsel tõenäosusega p.
Kui $0 < p < 1$, siis $q = 1 - p$.
$B_{n,m}$ – sündmus, et A toimub selles katseseerias täpselt m korda.
$P_{n,m} \stackrel{def.}{=} \mathrm{P}(B_{n,m})$.

Lause

Kui katseseerias on n sõltumatut katset ja sündmus A toimub igal katsel tõenäosusega p ning $B_{n,m}$ on sündmus, et A toimub selle seeria korral täpselt m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ korda, siis

$$P_{n,m} = \mathrm{P}(B_{n,m}) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$X = m$ – toimub sündmus $B_{n,m}$.

$$\mathrm{P}(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$

Bernoulli (katsete) skeem: n–sõltumatust katsest koosnev katseseeria, kus sündmus A toimub igal katsel tõenäosusega p.
Kui $0 < p < 1$, siis $q = 1 - p$.
$B_{n,m}$ – sündmus, et A toimub selles katseseerias täpselt m korda.
$P_{n,m} \overset{def.}{=} \mathrm{P}(B_{n,m})$.

Lause

Kui katseseerias on n sõltumatut katset ja sündmus A toimub igal katsel tõenäosusega p ning $B_{n,m}$ on sündmus, et A toimub selle seeria korral täpselt m ($0 \leqslant m \leqslant n$) korda, siis

$$P_{n,m} = \mathrm{P}(B_{n,m}) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$X = m$ – toimub sündmus $B_{n,m}$.

$$\mathrm{P}(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$

Bernoulli (katsete) skeem: n–sõltumatust katsest koosnev katseseeria, kus sündmus A toimub igal katsel tõenäosusega p.
Kui $0 < p < 1$, siis $q = 1 - p$.
$B_{n,m}$ – sündmus, et A toimub selles katseseerias täpselt m korda.
$P_{n,m} \overset{def.}{=} \mathrm{P}(B_{n,m})$.

Lause

Kui katseseerias on n sõltumatut katset ja sündmus A toimub igal katsel tõenäosusega p ning $B_{n,m}$ on sündmus, et A toimub selle seeria korral täpselt m ($0 \leqslant m \leqslant n$) korda, siis

$$P_{n,m} = \mathrm{P}(B_{n,m}) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$X = m$ – toimub sündmus $B_{n,m}$.

$$\mathrm{P}(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub ***binoomjaotusele*** *parameetritega n ja p ($0 < p < 1$), kui $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ja*

$$\mathrm{P}(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Poissoni jaotus

Definitsioon

Öeldakse, et juhuslik suurus X allub ***Poissoni jaotusele*** *parameetriga λ ($\lambda > 0$), kui N on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ja*

$$\mathrm{P}(X = m) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}.$$