

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Diskreetne juht

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \dots, n$. Otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes.

Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust.

Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse **vähimruutude funktsionaaliks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Diskreetne juht

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \dots, n$. Otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes.

Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust.

Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse **vähimruutude funktsionaaliks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Diskreetne juht

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \dots, n$. Otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes.

Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust.

Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Diskreetne juht

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \dots, n$. Otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes.

Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust.

Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse **vähimruutude funktsionaaliks**.

Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus c_1, c_2, \dots, c_m on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Seega

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x_i) - f(x_i) \right)^2.$$

Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus c_1, c_2, \dots, c_m on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Seega

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x_i) - f(x_i) \right)^2.$$

Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus c_1, c_2, \dots, c_m on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Seega

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x_i) - f(x_i) \right)^2.$$

Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus c_1, c_2, \dots, c_m on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Seega

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x_i) - f(x_i) \right)^2.$$

Funktsiooni $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad c_1, c_2, \dots, c_m saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$

Lineaarne juht

Kui $\Phi(x) = c_1x + c_2$, siis on vaja määrata kordajad c_1 ja c_2 .

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i))^2$$

ja

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} = 2 \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Lineaarne juht

Kui $\Phi(x) = c_1x + c_2$, siis on vaja määrata kordajad c_1 ja c_2 .

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i))^2$$

ja

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} = 2 \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Lineaarne juht

Kui $\Phi(x) = c_1x + c_2$, siis on vaja määrata kordajad c_1 ja c_2 .

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i))^2$$

ja

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} = 2 \sum_{i=0}^n \kappa_i (c_1 x_i + c_2 - f(x_i)) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \end{array} \right.$$

Analoogiliselt saab leida kordajad c_1, c_2, c_3 ruutfunktsioonile $\Phi = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$. Siis oleks vaja lahendada lineaarne võrrandisüsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \end{array} \right.$$

Analoogiliselt saab leida kordajad c_1, c_2, c_3 ruutfunktsioonile $\Phi = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$. Siis oleks vaja lahendada lineaarne võrrandisüsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i + c_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \end{array} \right.$$

Analoogiliselt saab leida kordajad c_1, c_2, c_3 ruutfunktsioonile $\Phi = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$. Siis oleks vaja lahendada lineaarne võrrandisüsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i^4 + C_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i^3 + C_3 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i^2 = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i^2 \\ C_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i^3 + C_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i^2 + C_3 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ C_1 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i^2 + C_2 \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot x_i + C_3 \sum_{i=0}^n \kappa_i = \sum_{i=0}^n \kappa_i \cdot f(x_i) \end{array} \right.$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga

$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1, i = 1, \dots, 7$.

Arvutame vajalikud summad:

$$\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 58, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 706$$

$$\sum y_i = 2,29, \sum x_i y_i = 12,03, \sum x_i^2 y_i = 41,61.$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga

$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1, i = 1, \dots, 7$.

Arvutame vajalikud summad:

$$\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 58, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 706$$

$$\sum y_i = 2,29, \sum x_i y_i = 12,03, \sum x_i^2 y_i = 41,61.$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga

$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1, i = 1, \dots, 7$.

Arvutame vajalikud summad:

$$\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 58, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 706$$

$$\sum y_i = 2,29, \sum x_i y_i = 12,03, \sum x_i^2 y_i = 41,61.$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga

$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1, i = 1, \dots, 7$.

Arvutame vajalikud summad:

$$\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 58, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 706$$

$$\sum y_i = 2,29, \sum x_i y_i = 12,03, \sum x_i^2 y_i = 41,61.$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga

$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1, i = 1, \dots, 7$.

Arvutame vajalikud summad:

$$\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 58, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 706$$

$$\sum y_i = 2,29, \sum x_i y_i = 12,03, \sum x_i^2 y_i = 41,61.$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga

$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1, i = 1, \dots, 7$.

Arvutame vajalikud summad:

$$\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 58, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 706$$

$$\sum y_i = 2,29, \sum x_i y_i = 12,03, \sum x_i^2 y_i = 41,61.$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga

$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1, i = 1, \dots, 7$.

Arvutame vajalikud summad:

$$\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 58, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 706$$

$$\sum y_i = 2,29, \sum x_i y_i = 12,03, \sum x_i^2 y_i = 41,61.$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga

$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1, i = 1, \dots, 7$.

Arvutame vajalikud summad:

$$\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 58, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 706$$

$$\sum y_i = 2,29, \sum x_i y_i = 12,03, \sum x_i^2 y_i = 41,61.$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga

$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1, i = 1, \dots, 7$.

Arvutame vajalikud summad:

$$\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 58, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 706$$

$$\sum y_i = 2,29, \sum x_i y_i = 12,03, \sum x_i^2 y_i = 41,61.$$

Seega süsteem tuleb kujule

$$\begin{cases} 706c_1 + 58c_3 = 41,61 \\ 58c_2 = 12,03 \\ 58c_1 + 7c_3 = 2,29 \end{cases}$$

Siit $c_3 = -0,5048$, $c_2 = 0,2074$ ja $c_1 = 0,1004$. Ruutfunktsiooniks tuleb seega

$$\Phi(x) = 0,1004x^2 + 0,2074x - 0,5048.$$

Seega süsteem tuleb kujule

$$\begin{cases} 706c_1 + 58c_3 = 41,61 \\ 58c_2 = 12,03 \\ 58c_1 + 7c_3 = 2,29 \end{cases}$$

Siit $c_3 = -0,5048$, $c_2 = 0,2074$ ja $c_1 = 0,1004$. Ruutfunktsiooniks tuleb seega

$$\Phi(x) = 0,1004x^2 + 0,2074x - 0,5048.$$

Seega süsteem tuleb kujule

$$\begin{cases} 706c_1 + 58c_3 = 41,61 \\ 58c_2 = 12,03 \\ 58c_1 + 7c_3 = 2,29 \end{cases}$$

Siit $c_3 = -0,5048$, $c_2 = 0,2074$ ja $c_1 = 0,1004$. Ruutfunktsiooniks tuleb seega

$$\Phi(x) = 0,1004x^2 + 0,2074x - 0,5048.$$

Pidev juht

Olgu funktsioon $f(x)$ määratud kogu lõigul $[a, b]$. Ülesandeks on leida selline $\Phi(x)$, mis langeks kõige paremini kokku funktsiooniga $f(x)$ tervel lõigul $[a, b]$. Funktsioonide $\Phi(x)$ ja $f(x)$ erinevuse mõõduks tervel lõigul $[a, b]$ võib võtta funktsionaali

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x)(\Phi(x) - f(x))^2 dx,$$

kus $\kappa(x)$ on kaalufunktsioon.

Ka pideval juhul võib otsida $\Phi(x)$ kujul $\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x)$, kus $\phi_j(x)$ on etteantud funktsioonid ning c_j tundmatud kordajad ($j = 1, 2, \dots, m$).

Siis

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m (c_j \phi_j(x) - f(x)) \right)^2 dx.$$

Pidev juht

Olgu funktsioon $f(x)$ määratud kogu lõigul $[a, b]$. Ülesandeks on leida selline $\Phi(x)$, mis langeks kõige paremini kokku funktsiooniga $f(x)$ tervel lõigul $[a, b]$. Funktsioonide $\Phi(x)$ ja $f(x)$ erinevuse mõõduks tervel lõigul $[a, b]$ võib võtta funktsionaali

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x)(\Phi(x) - f(x))^2 dx,$$

kus $\kappa(x)$ on kaalufunktsioon.

Ka pideval juhul võib otsida $\Phi(x)$ kujul $\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x)$, kus $\phi_j(x)$ on etteantud funktsioonid ning c_j tundmatud kordajad ($j = 1, 2, \dots, m$).
Siis

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m (c_j \phi_j(x) - f(x)) \right)^2 dx.$$

Pidev juht

Olgu funktsioon $f(x)$ määratud kogu lõigul $[a, b]$. Ülesandeks on leida selline $\Phi(x)$, mis langeks kõige paremini kokku funktsiooniga $f(x)$ tervel lõigul $[a, b]$. Funktsioonide $\Phi(x)$ ja $f(x)$ erinevuse mõõduks tervel lõigul $[a, b]$ võib võtta funktsionaali

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x)(\Phi(x) - f(x))^2 dx,$$

kus $\kappa(x)$ on kaalufunktsioon.

Ka pideval juhul võib otsida $\Phi(x)$ kujul $\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x)$, kus $\phi_j(x)$ on etteantud funktsioonid ning c_j tundmatud kordajad ($j = 1, 2, \dots, m$).

Siis

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m (c_j \phi_j(x) - f(x)) \right)^2 dx.$$

Pidev juht

Olgu funktsioon $f(x)$ määratud kogu lõigul $[a, b]$. Ülesandeks on leida selline $\Phi(x)$, mis langeks kõige paremini kokku funktsiooniga $f(x)$ tervel lõigul $[a, b]$. Funktsioonide $\Phi(x)$ ja $f(x)$ erinevuse mõõduks tervel lõigul $[a, b]$ võib võtta funktsionaali

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x)(\Phi(x) - f(x))^2 dx,$$

kus $\kappa(x)$ on kaalufunktsioon.

Ka pideval juhul võib otsida $\Phi(x)$ kujul $\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x)$, kus $\phi_j(x)$ on etteantud funktsioonid ning c_j tundmatud kordajad ($j = 1, 2, \dots, m$).

Siis

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m (c_j \phi_j(x) - f(x)) \right)^2 dx.$$

Miimumi jaoks $\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0$, iga $k = 1, 2, \dots, m$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial c_k} &= \frac{\partial}{\partial c_k} \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x) - f(x) \right)^2 dx = \\ &= 2 \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x) - f(x) \right) \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = \\ &= 2 \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x) - f(x) \right) \phi_k(x) dx = \\ &= 2 \sum_{j=1}^m \left(\int_a^b \kappa(x) \phi_j(x) \phi_k(x) dx \right) c_j - 2 \int_a^b \kappa(x) f(x) \phi_k(x) dx.\end{aligned}$$

Miinimumi jaoks $\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0$, iga $k = 1, 2, \dots, m$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial c_k} &= \frac{\partial}{\partial c_k} \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x) - f(x) \right)^2 dx = \\ &= 2 \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x) - f(x) \right) \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = \\ &= 2 \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x) - f(x) \right) \phi_k(x) dx = \\ &= 2 \sum_{j=1}^m \left(\int_a^b \kappa(x) \phi_j(x) \phi_k(x) dx \right) c_j - 2 \int_a^b \kappa(x) f(x) \phi_k(x) dx.\end{aligned}$$

Kordajate c_1, c_2, \dots, c_m määramiseks tekib lineaarne võrrandisüsteem

$$\sum_{j=1}^m \left(\int_a^b \kappa(x) \phi_j(x) \phi_k(x) dx \right) c_j = \int_a^b \kappa(x) f(x) \phi_k(x) dx,$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.

Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Tayloriga valemite: funktsiooni $f(x)$ Tayloriga valem punktis a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x),$$

$$\text{kus } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \xi \in (x, a).$$

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.

Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Taylorigi valemite: funktsiooni $f(x)$ Taylorigi valem punktis a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

$$\text{kus } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \xi \in (x, a).$$

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.

Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Taylorigi valemite:
funktsiooni $f(x)$ Taylorigi valem punktis a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

$$\text{kus } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \xi \in (x, a).$$

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.

Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Taylori valemit: funktsiooni $f(x)$ Taylori valem punktis a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x),$$

$$\text{kus } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \xi \in (x, a).$$

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a + h$, kus $h > 0$. Seame eesmärgiks leida $f'(a)$. Selleks esitame funktsiooni $f(x)$ Tayloriga valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a + h$. Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus $\xi \in (x, a)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a + h$, kus $h > 0$. Seame eesmärgiks leida $f'(a)$. Selleks esitame funktsiooni $f(x)$ Tayloriga valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a + h$. Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus $\xi \in (x, a)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a + h$, kus $h > 0$. Seame eesmärgiks leida $f'(a)$. Selleks esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a + h$. Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus $\xi \in (x, a)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a + h$, kus $h > 0$. Seame eesmärgiks leida $f'(a)$. Selleks esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a + h$. Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus $\xi \in (x, a)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a + h$, kus $h > 0$. Seame eesmärgiks leida $f'(a)$. Selleks esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a + h$. Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus $\xi \in (x, a)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a + h$, kus $h > 0$. Seame eesmärgiks leida $f'(a)$. Selleks esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a + h$. Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus $\xi \in (x, a)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a + h$, kus $h > 0$. Seame eesmärgiks leida $f'(a)$. Selleks esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a + h$. Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus $\xi \in (x, a)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku h .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga taha. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a - h$, kus $h > 0$. Esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$.

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus $\xi \in (a - h, a)$.

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku h .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga taha. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a - h$, kus $h > 0$.

Esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$.

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus $\xi \in (a - h, a)$.

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku h .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga taha. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a - h$, kus $h > 0$. Esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$.

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus $\xi \in (a - h, a)$.

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku h .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga taha. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a - h$, kus $h > 0$. Esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$.

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus $\xi \in (a - h, a)$.

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku h .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga taha. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a - h$, kus $h > 0$. Esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$.

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus $\xi \in (a - h, a)$.

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku h .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga taha. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis a ja $a - h$, kus $h > 0$. Esitame funktsiooni $f(x)$ Taylori valemi järguni $n = 1$ võttes $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$.

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus $\xi \in (a - h, a)$.

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga h** .

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku h .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema n korral. Olgu teada funktsiooni $f(x)$ väärtused punktides $a-h$ ja $a+h$, kus $h > 0$. Leiame Taylori valemi $n = 2$ korral, kui $x = a+h$, siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a - h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga h** .

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku h .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema n korral. Olgu teada funktsiooni $f(x)$ väärtused punktides $a - h$ ja $a + h$, kus $h > 0$. Leiame Taylori valemi $n = 2$ korral, kui $x = a + h$, siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$. Et $x - a = a + h - a = h$, siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga h** .

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku h .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema n korral. Olgu teada funktsiooni $f(x)$ väärtused punktides $a-h$ ja $a+h$, kus $h > 0$. Leiame Taylori valemi $n = 2$ korral, kui $x = a+h$, siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$. Et $x-a = a+h-a = h$, siis

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga h** .

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku h .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Tayloriga valemite suurema n korral. Olgu teada funktsiooni $f(x)$ väärtused punktides $a-h$ ja $a+h$, kus $h > 0$. Leiame Tayloriga valemite $n=2$ korral, kui $x = a+h$, siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$. Et $x-a = a+h-a = h$, siis

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga h** .

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku h .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema n korral. Olgu teada funktsiooni $f(x)$ väärtused punktides $a-h$ ja $a+h$, kus $h > 0$. Leiame Taylori valemi $n=2$ korral, kui $x = a+h$, siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$. Et $x-a = a+h-a = h$, siis

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui h on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga h** .

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku h .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema n korral. Olgu teada funktsiooni $f(x)$ väärtused punktides $a-h$ ja $a+h$, kus $h > 0$. Leiame Taylori valemi $n=2$ korral, kui $x = a+h$, siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$. Et $x-a = a+h-a = h$, siis

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kordame arutluskäiku, kui $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$ ja Taylori valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$.

Lahutame seosest (*) seose (**):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui $f'''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2

Kordame arutluskäiku, kui $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$ ja Taylori valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$.

Lahutame seosest (*) seose (**):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui $f'''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2

Kordame arutluskäiku, kui $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$ ja Taylori valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$.

Lahutame seosest (*) seose (**):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui $f'''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2

Kordame arutluskäiku, kui $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$ ja Taylori valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$.

Lahutame seosest (*) seose (**):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui $f'''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2

Kordame arutluskäiku, kui $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$ ja Taylori valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$.

Lahutame seosest (*) seose (**):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2 .

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni $f(x)$ väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks $a - h$, a ja $a + h$, kus $h > 0$. Paneme kirja Taylori valemi järguni $n = 3$ kahel juhul: kõigepealt $x = a + h$, siis $x - a = a + h - a = h$, teiseks $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$. Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$ ja $\eta \in (a - h, a)$.

Liidame seosed (***) ja (***) , saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni $f(x)$ väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks $a - h$, a ja $a + h$, kus $h > 0$. Paneme kirja Taylori valemi järguni $n = 3$ kahel juhul: kõigepealt $x = a + h$, siis $x - a = a + h - a = h$, teiseks $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$. Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$ ja $\eta \in (a - h, a)$.

Liidame seosed (***) ja (***) , saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni $f(x)$ väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks $a - h$, a ja $a + h$, kus $h > 0$. Paneme kirja Tayloriga valemi järguni $n = 3$ kahel juhul: kõigepealt $x = a + h$, siis $x - a = a + h - a = h$, teiseks $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$.

Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$ ja $\eta \in (a - h, a)$.

Liidame seosed (***) ja (***) , saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni $f(x)$ väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks $a - h$, a ja $a + h$, kus $h > 0$. Paneme kirja Taylori valemi järguni $n = 3$ kahel juhul: kõigepealt $x = a + h$, siis $x - a = a + h - a = h$, teiseks $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$.

Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$ ja $\eta \in (a - h, a)$.

Liidame seosed (***) ja (***) , saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni $f(x)$ väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks $a - h$, a ja $a + h$, kus $h > 0$. Paneme kirja Taylori valemi järguni $n = 3$ kahel juhul: kõigepealt $x = a + h$, siis $x - a = a + h - a = h$, teiseks $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$. Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$ ja $\eta \in (a - h, a)$.

Liidame seosed (***) ja (***) , saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni $f(x)$ väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks $a - h$, a ja $a + h$, kus $h > 0$. Paneme kirja Taylori valemi järguni $n = 3$ kahel juhul: kõigepealt $x = a + h$, siis $x - a = a + h - a = h$, teiseks $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$. Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$ ja $\eta \in (a - h, a)$.

Liidame seosed (***) ja (***) , saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni $f(x)$ väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks $a - h$, a ja $a + h$, kus $h > 0$. Paneme kirja Taylori valemi järguni $n = 3$ kahel juhul: kõigepealt $x = a + h$, siis $x - a = a + h - a = h$, teiseks $x = a - h$, siis $x - a = a - h - a = -h$. Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$ ja $\eta \in (a - h, a)$.

Liidame seosed (***) ja (***) , saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Siis

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi) + f^{IV}(\eta)}{4!} h^2$$

ning

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Rohkemaid diferentsvalemeid saab leida arvutusmeetodite käsiraamatutest.

Siis

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi) + f^{IV}(\eta)}{4!} h^2$$

ning

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Rohkemaid diferentsvalemeid saab leida arvutusmeetodite käsiraamatutest.

Siis

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi) + f^{IV}(\eta)}{4!} h^2$$

ning

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Rohkemaid diferentsvalemeid saab leida arvutusmeetodite käsiraamatutest.

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui $[a, b]$ on tükeldatud, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui $[a, b]$ on tükeldatud, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui $[a, b]$ on tükeldatud, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui $[a, b]$ on tükeldatud, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui $[a, b]$ on tükeldatud, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui $[a, b]$ on tükeldatud, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Kui $[a; b]$ on jaotatud ühtlaselt, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ning $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{a-b}{n}$, siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Võttes $p_i = x_i$, saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus C on konstant.

Kui $[a; b]$ on jaotatud ühtlaselt, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ning $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{a-b}{n}$, siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Võttes $p_i = x_i$, saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus C on konstant.

Kui $[a; b]$ on jaotatud ühtlaselt, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ning $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{a-b}{n}$, siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Võttes $p_i = x_i$, saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus C on konstant.

Kui $[a; b]$ on jaotatud ühtlaselt, st $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ning $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{a-b}{n}$, siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Võttes $p_i = x_i$, saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus C on konstant.

Tuletame mõned kõrgema täpsusega kvadratuurvalemid. Üldiselt on kõik sellised kvadratuurvalemid esitatavad kujul

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

kus A_i on mingid kordajad ja $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Newton-Cotesi kvadratuurvalem

Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ tema polünoomiaalse interpolandiga sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n :

$$f(x) \approx \Phi_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i),$$

kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Tuletame mõned kõrgema täpsusega kvadratuurvalemid. Üldiselt on kõik sellised kvadratuurvalemid esitatavad kujul

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

kus A_i on mingid kordajad ja $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Newton-Cotesi kvadratuurvalem

Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ tema polünoomiaalse interpolandiga sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n :

$$f(x) \approx \Phi_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i),$$

kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Tuletame mõned kõrgema täpsusega kvadratuurvalemid. Üldiselt on kõik sellised kvadratuurvalemid esitatavad kujul

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

kus A_i on mingid kordajad ja $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Newton-Cotesi kvadratuurvalem

Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ tema polünoomiaalse interpolandiga sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n :

$$f(x) \approx \Phi_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i),$$

kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Siis

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_a^b L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b L_{n,i}(x) dx \right] f(x_i).\end{aligned}$$

Tähistades $A_i = \int_a^b L_{n,i}(x) dx$, olemegi saanud **Newton-Cotesi kvadratuurvalemi**

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Siis

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_a^b L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b L_{n,i}(x) dx \right] f(x_i).\end{aligned}$$

Tähistades $A_i = \int_a^b L_{n,i}(x) dx$, olemegi saanud **Newton-Cotesi kvadratuurvalemi**

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Siis

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_a^b L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b L_{n,i}(x) dx \right] f(x_i).\end{aligned}$$

Tähistades $A_i = \int_a^b L_{n,i}(x) dx$, olemegi saanud **Newton-Cotesi kvadratuurvalemi**

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Kordajate A_i leidmiseks on vaja arvutada

$$A_i = \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} dx.$$

Ühtlase võrgu korral ($h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$) avaldub

$$A_i = (b - a)B_i,$$

kus B_i väärtusi saab leida käsiraamatutest.

Kordajate A_i leidmiseks on vaja arvutada

$$A_i = \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} dx.$$

Ühtlase võrgu korral ($h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$) avaldub

$$A_i = (b - a)B_i,$$

kus B_i väärtusi saab leida käsiraamatutest.

Näiteks

n	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	-	-
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	-	-
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	-
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

Kui $n = 1$, siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Kui $n = 2$, siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus $C > 0$ on konstant, mis ei sõltu n ja M_n on $|f^{(n+1)}(x)|$ maksimaalne väärtus lõigul $[a, b]$.

Kui $n = 1$, siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

Kui $n = 2$, siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus $C > 0$ on konstant, mis ei sõltu n ja M_n on $|f^{(n+1)}(x)|$ maksimaalne väärtus lõigul $[a, b]$.

Kui $n = 1$, siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

Kui $n = 2$, siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus $C > 0$ on konstant, mis ei sõltu n ja M_n on $|f^{(n+1)}(x)|$ maksimaalne väärtus lõigul $[a, b]$.

Kui $n = 1$, siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

Kui $n = 2$, siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus $C > 0$ on konstant, mis ei sõltu n ja M_n on $|f^{(n+1)}(x)|$ maksimaalne väärtus lõigul $[a, b]$.

Kui $n = 1$, siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Kui $n = 2$, siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus $C > 0$ on konstant, mis ei sõltu n ja M_n on $|f^{(n+1)}(x)|$ maksimaalne väärtus lõigul $[a, b]$.

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n . Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit $n = 1$ korral (võtame $a = x_{i-1}$ ja $b = x_i$), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n . Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit $n = 1$ korral (võtame $a = x_{i-1}$ ja $b = x_i$), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n . Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit $n = 1$ korral (võtame $a = x_{i-1}$ ja $b = x_i$), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n . Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit $n = 1$ korral (võtame $a = x_{i-1}$ ja $b = x_i$), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n . Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit $n = 1$ korral (võtame $a = x_{i-1}$ ja $b = x_i$), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n . Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit $n = 1$ korral (võtame $a = x_{i-1}$ ja $b = x_i$), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemiga viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemiga iga osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemiga viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemiga iga osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemiga viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemiga igaosalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemi viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Et lõigul $[a, b]$ leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil $n = \frac{b-a}{h}$, seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Et lõigul $[a, b]$ leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil $n = \frac{b-a}{h}$, seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Et lõigul $[a, b]$ leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil $n = \frac{b-a}{h}$, seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Et lõigul $[a, b]$ leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil $n = \frac{b-a}{h}$, seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Et lõigul $[a, b]$ leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil $n = \frac{b-a}{h}$, seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Et lõigul $[a, b]$ leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil $n = \frac{b-a}{h}$, seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, \dots , $[x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.

Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, \dots , $[x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.

Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, \dots , $[x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.

Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, \dots , $[x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.

Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osalõigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, \dots , $[x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.

Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, \dots , $[x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.

Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, \dots , $[x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.

Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, \dots , $[x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.

Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osalõigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx =$$

$$= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] +$$

$$+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$S_n = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) +$$
$$+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osaloike kokku $\frac{n}{2}$, absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^4.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osaloike kokku $\frac{n}{2}$, absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^4.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osaloike kokku $\frac{n}{2}$, absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^4.$$

Osaloigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osaloike kokku $\frac{n}{2}$, absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^4.$$