

# Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.

Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Tayloriga valemite: funktsiooni  $f(x)$  Taylori valem punktis  $a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x),$$

$$\text{kus } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \quad \xi \in (x, a).$$

# Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.

Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Tayloriga valemit: funktsiooni  $f(x)$  Tayloriga valem punktis  $a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x),$$

$$\text{kus } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \quad \xi \in (x, a).$$

# Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.

Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Taylori valemit:  
funktsiooni  $f(x)$  Taylori valem punktis  $a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x),$$

$$\text{kus } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \xi \in (x, a).$$

# Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks*.

Kasutame diferentsvalemite tuletamiseks Taylori valemit: funktsiooni  $f(x)$  Taylori valem punktis  $a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x),$$

$$\text{kus } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \quad \xi \in (x, a).$$

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Seame eesmärgiks leida  $f'(a)$ . Selleks esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a + h$ . Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus  $\xi \in (x, a)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Seame eesmärgiks leida  $f'(a)$ . Selleks esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a + h$ . Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus  $\xi \in (x, a)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Seame eesmärgiks leida  $f'(a)$ . Selleks esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a + h$ . Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus  $\xi \in (x, a)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Seame eesmärgiks leida  $f'(a)$ . Selleks esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a + h$ . Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus  $\xi \in (x, a)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.



Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Seame eesmärgiks leida  $f'(a)$ . Selleks esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a + h$ . Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus  $\xi \in (x, a)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Seame eesmärgiks leida  $f'(a)$ . Selleks esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a + h$ . Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus  $\xi \in (x, a)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Seame eesmärgiks leida  $f'(a)$ . Selleks esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a + h$ . Saame

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2,$$

kus  $\xi \in (x, a)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga ette**.

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku  $h$ .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga  $h$  ta. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a - h$ , kus  $h > 0$ . Esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ .

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus  $\xi \in (a - h, a)$ .

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku  $h$ .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga  $h$  ta. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a - h$ , kus  $h > 0$ . Esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ .

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus  $\xi \in (a - h, a)$ .

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku  $h$ .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga  $h$ . Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a - h$ , kus  $h > 0$ . Esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ .

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus  $\xi \in (a - h, a)$ .

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku  $h$ .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga  $h$ . Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a - h$ , kus  $h > 0$ . Esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ .

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus  $\xi \in (a - h, a)$ .

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku  $h$ .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga  $h$ . Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a - h$ , kus  $h > 0$ . Esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ .

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus  $\xi \in (a - h, a)$ .

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$



Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis saab jääkliiget hinnata

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2} h \right| \leq Ch,$$

st viga on suurusjärku  $h$ .

Analoogiliselt saab tuletada diferentsvalemi sammuga  $h$  ta. Selleks olgu antud funktsiooni väärtused kahes punktis  $a$  ja  $a - h$ , kus  $h > 0$ . Esitame funktsiooni  $f(x)$  Taylori valemi järguni  $n = 1$  võttes  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ .

Saame

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

kus  $\xi \in (a - h, a)$ .

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a - h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga  $h$** .

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku  $h$ .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema  $n$  korral. Olgu teada funktsiooni  $f(x)$  väärtused punktides  $a - h$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Leiame Taylori valemi  $n = 2$  korral, kui  $x = a + h$ , siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a - h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga  $h$** .

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku  $h$ .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema  $n$  korral. Olgu teada funktsiooni  $f(x)$  väärtused punktides  $a - h$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Leiame Taylori valemi  $n = 2$  korral, kui  $x = a + h$ , siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a - h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga  $h$** .

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku  $h$ .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema  $n$  korral. Olgu teada funktsiooni  $f(x)$  väärtused punktides  $a - h$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Leiame Taylori valemi  $n = 2$  korral, kui  $x = a + h$ , siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga  $h$** .

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku  $h$ .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema  $n$  korral. Olgu teada funktsiooni  $f(x)$  väärtused punktides  $a-h$  ja  $a+h$ , kus  $h > 0$ . Leiame Taylori valemi  $n = 2$  korral, kui  $x = a+h$ , siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a - h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga  $h$** .

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku  $h$ .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema  $n$  korral. Olgu teada funktsiooni  $f(x)$  väärtused punktides  $a - h$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Leiame Taylori valemi  $n = 2$  korral, kui  $x = a + h$ , siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kui  $h$  on väike, siis

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Valemit nimetatakse **diferentsvalemiks sammuga  $h$** .

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis on ka selle valemi viga suurusjärku  $h$ .

Täpsemate diferentsvalemite tuletamiseks on vaja kasutada Taylori valemit suurema  $n$  korral. Olgu teada funktsiooni  $f(x)$  väärtused punktides  $a-h$  ja  $a+h$ , kus  $h > 0$ . Leiame Taylori valemi  $n = 2$  korral, kui  $x = a+h$ , siis

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

$\xi \in (a, x)$ . Et  $x - a = a + h - a = h$ , siis

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3. \quad (*)$$

Kordame arutluskäiku, kui  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$  ja Taylori valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$ .

Lahutame seosest (\*) seose (\*\*):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus  $h > 0$ . Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis viga on suurusjärku  $h^2$



Kordame arutluskäiku, kui  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$  ja Taylori valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$ .

Lahutame seosest (\*) seose (\*\*):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus  $h > 0$ . Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis viga on suurusjärku  $h^2$

Kordame arutluskäiku, kui  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$  ja Taylori valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$ .

Lahutame seosest (\*) seose (\*\*):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus  $h > 0$ . Valemite kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis viga on suurusjärku  $h^2$

Kordame arutluskäiku, kui  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$  ja Taylori valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$ .

Lahutame seosest (\*) seose (\*\*):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus  $h > 0$ . Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis viga on suurusjärku  $h^2$

Kordame arutluskäiku, kui  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$  ja Taylorig valem on kujul

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3. \quad (**)$$

$\eta \in (a - h, a)$ .

Lahutame seosest (\*) seose (\*\*):

$$f(a + h) - f(a - h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

Siit

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2 \cdot 3!}h^2.$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kus  $h > 0$ . Valemit kutsutakse **keskmistatud** ehk **sümmeetriliseks diferentsvalemiks**.

Kui  $f''(x)$  on tõkestatud, siis viga on suurusjärku  $h^2$ .

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni  $f(x)$  väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks  $a - h$ ,  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Paneme kirja Taylori valemi järguni  $n = 3$  kahel juhul: kõigepealt  $x = a + h$ , siis  $x - a = a + h - a = h$ , teiseks  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ . Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$  ja  $\eta \in (a - h, a)$ .

Liidame seosed (\*\*\*) ja (\*\*\*) , saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni  $f(x)$  väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks  $a - h$ ,  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Paneme kirja Tayloriga valemiga järguni  $n = 3$  kahel juhul: kõigepealt  $x = a + h$ , siis  $x - a = a + h - a = h$ , teiseks  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ . Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$  ja  $\eta \in (a - h, a)$ .

Liidame seosed (\*\*\*) ja (\*\*\*\*), saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni  $f(x)$  väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks  $a - h$ ,  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Paneme kirja Taylori valemi järguni  $n = 3$  kahel juhul: kõigepealt  $x = a + h$ , siis  $x - a = a + h - a = h$ , teiseks  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ .

Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$  ja  $\eta \in (a - h, a)$ .

Liidame seosed (\*\*\*) ja (\*\*\*) , saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni  $f(x)$  väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks  $a - h$ ,  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Paneme kirja Taylori valemi järguni  $n = 3$  kahel juhul: kõigepealt  $x = a + h$ , siis  $x - a = a + h - a = h$ , teiseks  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ .

Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$  ja  $\eta \in (a - h, a)$ .

Liidame seosed (\*\*\*) ja (\*\*\*\*), saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$



Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni  $f(x)$  väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks  $a - h$ ,  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Paneme kirja Taylori valemi järguni  $n = 3$  kahel juhul: kõigepealt  $x = a + h$ , siis  $x - a = a + h - a = h$ , teiseks  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ . Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$  ja  $\eta \in (a - h, a)$ .

Liidame seosed (\*\*\*) ja (\*\*\*\*), saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni  $f(x)$  väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks  $a - h$ ,  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Paneme kirja Taylori valemi järguni  $n = 3$  kahel juhul: kõigepealt  $x = a + h$ , siis  $x - a = a + h - a = h$ , teiseks  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ . Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$  ja  $\eta \in (a - h, a)$ .

Liidame seosed (\*\*\*) ja (\*\*\*\*), saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Tuletame ühe diferentsvalemi teist järku tuletise arvutamiseks.

Peaksime selleks teadma funktsiooni  $f(x)$  väärtust teadma vähemalt kolmes punktis. Olgu nendeks  $a - h$ ,  $a$  ja  $a + h$ , kus  $h > 0$ . Paneme kirja Taylori valemi järguni  $n = 3$  kahel juhul: kõigepealt  $x = a + h$ , siis  $x - a = a + h - a = h$ , teiseks  $x = a - h$ , siis  $x - a = a - h - a = -h$ . Saame vastavalt

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4. \quad (***)$$

$\xi \in (a, a + h)$  ja  $\eta \in (a - h, a)$ .

Liidame seosed (\*\*\*) ja (\*\*\*\*), saame

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + 2\frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}h^4 + \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}h^4.$$

Siis

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi) + f^{IV}(\eta)}{4!} h^2$$

ning

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Rohkemaid diferentsvalemeid saab leida arvutusmeetodite käsiraamatutest.

Siis

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi) + f^{IV}(\eta)}{4!} h^2$$

ning

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Rohkemaid diferentsvalemeid saab leida arvutusmeetodite käsiraamatutest.

Siis

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi) + f^{IV}(\eta)}{4!} h^2$$

ning

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Rohkemaid diferentsvalemeid saab leida arvutusmeetodite käsiraamatutest.

# Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui  $[a, b]$  on tükeldatud, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus  $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ja  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

# Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui  $[a, b]$  on tükeldatud, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus  $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ja  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .



# Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui  $[a, b]$  on tükeldatud, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus  $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ja  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

# Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui  $[a, b]$  on tükeldatud, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus  $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ja  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

# Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui  $[a, b]$  on tükeldatud, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus  $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ja  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

# Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

leidmist.

Ligikaudseid valemeid sellise integraali leidmiseks nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Määratud integraal on integraalsumma piirväärtus. Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.

Kui  $[a, b]$  on tükeldatud, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , siis integraalsummaks on

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

kus  $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ja  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Kui  $[a; b]$  on jaotatud ühtlaselt, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ning  $x_i = x_0 + ih$ ,  $h = \frac{a-b}{n}$ , siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Võttes  $p_i = x_i$ , saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus  $C$  on konstant.

Kui  $[a; b]$  on jaotatud ühtlaselt, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ning  $x_i = x_0 + ih$ ,  $h = \frac{a-b}{n}$ , siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Võttes  $p_i = x_i$ , saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus  $C$  on konstant.

Kui  $[a; b]$  on jaotatud ühtlaselt, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ning  $x_i = x_0 + ih$ ,  $h = \frac{a-b}{n}$ , siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Võttes  $p_i = x_i$ , saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus  $C$  on konstant.

Kui  $[a; b]$  on jaotatud ühtlaselt, st  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ning  $x_i = x_0 + ih$ ,  $h = \frac{a-b}{n}$ , siis

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Võttes  $p_i = x_i$ , saame ristkülikvalemi

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Ristkülikvalem on esimest järku täpsusega, st

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch,$$

kus  $C$  on konstant.



Tuletame mõned kõrgema täpsusega kvadratuurvalemid. Üldiselt on kõik sellised kvadratuurvalemid esitatavad kujul

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

kus  $A_i$  on mingid kordajad ja  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

*Newton-Cotesi kvadratuurvalem*

Asendame integreeritava funktsiooni  $f(x)$  tema polünoomiaalse interpolandiga sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :

$$f(x) \approx \Phi_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i),$$

kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Tuletame mõned kõrgema täpsusega kvadratuurvalemid. Üldiselt on kõik sellised kvadratuurvalemid esitatavad kujul

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

kus  $A_i$  on mingid kordajad ja  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

### *Newton-Cotesi kvadratuurvalem*

Asendame integreeritava funktsiooni  $f(x)$  tema polünomiaalse interpolandiga sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :

$$f(x) \approx \Phi_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i),$$

kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Tuletame mõned kõrgema täpsusega kvadratuurvalemid. Üldiselt on kõik sellised kvadratuurvalemid esitatavad kujul

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

kus  $A_i$  on mingid kordajad ja  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

### *Newton-Cotesi kvadratuurvalem*

Asendame integreeritava funktsiooni  $f(x)$  tema polünoomiaalse interpolandiga sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :

$$f(x) \approx \Phi_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i),$$

kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Siis

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_a^b L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left[ \int_a^b L_{n,i}(x) dx \right] f(x_i).\end{aligned}$$

Tähistades  $A_i = \int_a^b L_{n,i}(x) dx$ , olemegi saanud **Newton-Cotesi kvadratuurvalemi**

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Siis

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_a^b L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left[ \int_a^b L_{n,i}(x) dx \right] f(x_i).\end{aligned}$$

Tähistades  $A_i = \int_a^b L_{n,i}(x) dx$ , olemegi saanud **Newton-Cotesi kvadratuurvalemi**

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Siis

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi_n(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_a^b L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left[ \int_a^b L_{n,i}(x) dx \right] f(x_i).\end{aligned}$$

Tähistades  $A_i = \int_a^b L_{n,i}(x) dx$ , olemegi saanud **Newton-Cotesi kvadratuurvalemi**

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Kordajate  $A_i$  leidmiseks on vaja arvutada

$$A_i = \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} dx.$$

Ühtlase võrgu korral ( $h = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) avaldub

$$A_i = (b - a)B_i,$$

kus  $B_i$  väärtusi saab leida käsiraamatutest.

Kordajate  $A_i$  leidmiseks on vaja arvutada

$$A_i = \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} dx.$$

Ühtlase võrgu korral ( $h = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) avaldub

$$A_i = (b - a)B_i,$$

kus  $B_i$  väärtusi saab leida käsiraamatutest.



## Näiteks

$n$	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	-	-
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	-	-
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	-
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

Kui  $n = 1$ , siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Kui  $n = 2$ , siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus  $C > 0$  on konstant, mis ei sõltu  $n$  ja  $M_n$  on  $|f^{(n+1)}(x)|$  maksimaalne väärtus lõigul  $[a, b]$ .

Kui  $n = 1$ , siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Kui  $n = 2$ , siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus  $C > 0$  on konstant, mis ei sõltu  $n$  ja  $M_n$  on  $|f^{(n+1)}(x)|$  maksimaalne väärtus lõigul  $[a, b]$ .

Kui  $n = 1$ , siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Kui  $n = 2$ , siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus  $C > 0$  on konstant, mis ei sõltu  $n$  ja  $M_n$  on  $|f^{(n+1)}(x)|$  maksimaalne väärtus lõigul  $[a, b]$ .

Kui  $n = 1$ , siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Kui  $n = 2$ , siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus  $C > 0$  on konstant, mis ei sõltu  $n$  ja  $M_n$  on  $|f^{(n+1)}(x)|$  maksimaalne väärtus lõigul  $[a, b]$ .

Kui  $n = 1$ , siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Kui  $n = 2$ , siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus  $C > 0$  on konstant, mis ei sõltu  $n$  ja  $M_n$  on  $|f^{(n+1)}(x)|$  maksimaalne väärtus lõigul  $[a, b]$ .

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu  $\Phi(x)$  funktsiooni  $f(x)$  tükiti lineaarne interpolant sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Asendame integreeritava funktsiooni  $f(x)$  selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit  $n = 1$  korral (võtame  $a = x_{i-1}$  ja  $b = x_i$ ), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu  $\Phi(x)$  funktsiooni  $f(x)$  tükiti lineaarne interpolant sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Asendame integreeritava funktsiooni  $f(x)$  selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit  $n = 1$  korral (võtame  $a = x_{i-1}$  ja  $b = x_i$ ), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$



Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu  $\Phi(x)$  funktsiooni  $f(x)$  tükiti lineaarne interpolant sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Asendame integreeritava funktsiooni  $f(x)$  selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit  $n = 1$  korral (võtame  $a = x_{i-1}$  ja  $b = x_i$ ), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu  $\Phi(x)$  funktsiooni  $f(x)$  tükiti lineaarne interpolant sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Asendame integreeritava funktsiooni  $f(x)$  selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit  $n = 1$  korral (võtame  $a = x_{i-1}$  ja  $b = x_i$ ), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu  $\Phi(x)$  funktsiooni  $f(x)$  tükiti lineaarne interpolant sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Asendame integreeritava funktsiooni  $f(x)$  selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit  $n = 1$  korral (võtame  $a = x_{i-1}$  ja  $b = x_i$ ), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Üldiselt kasutatakse polünoomiaalse interpolandi asemel tükiti polünoomiaalset interpolanti. Olgu  $\Phi(x)$  funktsiooni  $f(x)$  tükiti lineaarne interpolant sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Asendame integreeritava funktsiooni  $f(x)$  selle interpolandiga ning integreerime

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx.\end{aligned}$$

Lõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit  $n = 1$  korral (võtame  $a = x_{i-1}$  ja  $b = x_i$ ), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

## Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemil viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

## Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

## Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemil viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

## Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemil viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

## Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemil viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$



## Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemil viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

## Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

## Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemiga viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

## Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \\ &\quad \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

## Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks**. Trapetsvalemiga viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 h^3.$$

Et lõigul  $[a, b]$  leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil  $n = \frac{b-a}{h}$ , seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Et lõigul  $[a, b]$  leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil  $n = \frac{b-a}{h}$ , seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Et lõigul  $[a, b]$  leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil  $n = \frac{b-a}{h}$ , seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Et lõigul  $[a, b]$  leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil  $n = \frac{b-a}{h}$ , seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Et lõigul  $[a, b]$  leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil  $n = \frac{b-a}{h}$ , seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$



Et lõigul  $[a, b]$  leitav integraal avaldub osalõikudel leitavate integraalide summana, liitmisel liidetavate absoluutsed vead liituvad, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3.$$

Meil  $n = \frac{b-a}{h}$ , seega

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^2$$

Vaatame nüüd juhtu, kus  $\Phi(x)$  on ruutinterpolant, st igal lõigul  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$  on  $\Phi(x)$  on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab  $n$  olema paaris arv.

Asendame funktsiooni  $f(x)$  tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  on  $\Phi(x)$  ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ( $n = 2$ , võttes  $a = x_{2i-2}$  ja  $b = x_{2i}$ ). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus  $\Phi(x)$  on ruutinterpolant, st igal lõigul  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$  on  $\Phi(x)$  on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab  $n$  olema paaris arv.

Asendame funktsiooni  $f(x)$  tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  on  $\Phi(x)$  ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ( $n = 2$ , võttes  $a = x_{2i-2}$  ja  $b = x_{2i}$ ). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus  $\Phi(x)$  on ruutinterpolant, st igal lõigul  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$  on  $\Phi(x)$  on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab  $n$  olema paaris arv.

Asendame funktsiooni  $f(x)$  tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  on  $\Phi(x)$  ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ( $n = 2$ , võttes  $a = x_{2i-2}$  ja  $b = x_{2i}$ ). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus  $\Phi(x)$  on ruutinterpolant, st igal lõigul  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$  on  $\Phi(x)$  on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab  $n$  olema paaris arv.

Asendame funktsiooni  $f(x)$  tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  on  $\Phi(x)$  ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ( $n = 2$ , võttes  $a = x_{2i-2}$  ja  $b = x_{2i}$ ). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus  $\Phi(x)$  on ruutinterpolant, st igal lõigul  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$  on  $\Phi(x)$  on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab  $n$  olema paaris arv.

Asendame funktsiooni  $f(x)$  tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  on  $\Phi(x)$  ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ( $n = 2$ , võttes  $a = x_{2i-2}$  ja  $b = x_{2i}$ ). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus  $\Phi(x)$  on ruutinterpolant, st igal lõigul  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$  on  $\Phi(x)$  on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab  $n$  olema paaris arv.

Asendame funktsiooni  $f(x)$  tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  on  $\Phi(x)$  ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ( $n = 2$ , võttes  $a = x_{2i-2}$  ja  $b = x_{2i}$ ). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd juhtu, kus  $\Phi(x)$  on ruutinterpolant, st igal lõigul  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$  on  $\Phi(x)$  on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab  $n$  olema paaris arv.

Asendame funktsiooni  $f(x)$  tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  on  $\Phi(x)$  ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ( $n = 2$ , võttes  $a = x_{2i-2}$  ja  $b = x_{2i}$ ). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$



Vaatame nüüd juhtu, kus  $\Phi(x)$  on ruutinterpolant, st igal lõigul  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_n]$  on  $\Phi(x)$  on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab  $n$  olema paaris arv.

Asendame funktsiooni  $f(x)$  tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  on  $\Phi(x)$  ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ( $n = 2$ , võttes  $a = x_{2i-2}$  ja  $b = x_{2i}$ ). Siis

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx &= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx =$$

$$= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] +$$

$$+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$S_n = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) +$$
$$+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx = \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\
 &+ \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\
 &+ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].
 \end{aligned}$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osaloike kokku  $\frac{n}{2}$ , absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^4.$$



Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osaloike kokku  $\frac{n}{2}$ , absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^4.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osaloike kokku  $\frac{n}{2}$ , absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^4.$$

Osaloigul  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osaloike kokku  $\frac{n}{2}$ , absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq Ch^4.$$