Näiteid ülesannetest, mille lahendamiseks kasutatakse HDV

1. Vaatleme suurt anumat, mis sisaldab suhkruvett lahjade jookide valmistamiseks.

- Sisaldagu anum 100 l vedelikku, kusjuures vedeliku hulk, mis voolab sisse, võrdub vedeliku hulgaga, mis voolab välja.
- Vaadi sisu segatakse pidevalt nii, et suhkru kontsentratsioon on kõikjal ühesugune.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 5 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru A kiirusega 2 l minutis.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 10 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru B kiirusega 1 l minutis.
- Suhkruvesi voolab vaadist välja toru C kaudu kiirusega 3 l minutis.

Leidke matemaatiline mudel, mis kirjeldaks suhkru koguse $S(t)$ muutumist vaadis.

Näiteid ülesannetest, mille lahendamiseks kasutatakse HDV

1. Vaatleme suurt anumat, mis sisaldab suhkruvett lahjade jookide valmistamiseks.

- Sisaldagu anum 100 l vedelikku, kusjuures vedeliku hulk, mis voolab sisse, võrdub vedeliku hulgaga, mis voolab välja.
- Vaadi sisu segatakse pidevalt nii, et suhkru kontsentratsioon on kõikjal ühesugune.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 5 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru A kiirusega 2 l minutis.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 10 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru B kiirusega 1 l minutis.
- Suhkruvesi voolab vaadist välja toru C kaudu kiirusega 3 l minutis.

Leidke matemaatiline mudel, mis kirjeldaks suhkru koguse $S(t)$ muutumist vaadis.

Näiteid ülesannetest, mille lahendamiseks kasutatakse HDV

1. Vaatleme suurt anumat, mis sisaldab suhkruvett lahjade jookide valmistamiseks.

- Sisaldagu anum 100 l vedelikku, kusjuures vedeliku hulk, mis voolab sisse, võrdub vedeliku hulgaga, mis voolab välja.
- Vaadi sisu segatakse pidevalt nii, et suhkru kontsentratsioon on kõikjal ühesugune.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 5 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru A kiirusega 2 l minutis.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 10 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru B kiirusega 1 l minutis.
- Suhkruvesi voolab vaadist välja toru C kaudu kiirusega 3 l minutis.

Leidke matemaatiline mudel, mis kirjeldaks suhkru koguse $S(t)$ muutumist vaadis.

Näiteid ülesannetest, mille lahendamiseks kasutatakse HDV

1. Vaatleme suurt anumat, mis sisaldab suhkruvett lahjade jookide valmistamiseks.

- Sisaldagu anum 100 l vedelikku, kusjuures vedeliku hulk, mis voolab sisse, võrdub vedeliku hulgaga, mis voolab välja.
- Vaadi sisu segatakse pidevalt nii, et suhkru kontsentratsioon on kõikjal ühesugune.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 5 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru A kiirusega 2 l minutis.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 10 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru B kiirusega 1 l minutis.
- Suhkruvesi voolab vaadist välja toru C kaudu kiirusega 3 l minutis.

Leidke matemaatiline mudel, mis kirjeldaks suhkru koguse $S(t)$ muutumist vaadis.

Näiteid ülesannetest, mille lahendamiseks kasutatakse HDV

1. Vaatleme suurt anumat, mis sisaldab suhkruvett lahjade jookide valmistamiseks.

- Sisaldagu anum 100 l vedelikku, kusjuures vedeliku hulk, mis voolab sisse, võrdub vedeliku hulgaga, mis voolab välja.
- Vaadi sisu segatakse pidevalt nii, et suhkru kontsentratsioon on kõikjal ühesugune.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 5 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru A kiirusega 2 l minutis.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 10 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru B kiirusega 1 l minutis.
- Suhkruvesi voolab vaadist välja toru C kaudu kiirusega 3 l minutis.

Leidke matemaatiline mudel, mis kirjeldaks suhkru koguse $S(t)$ muutumist vaadis.

Näiteid ülesannetest, mille lahendamiseks kasutatakse HDV

1. Vaatleme suurt anumat, mis sisaldab suhkruvett lahjade jookide valmistamiseks.

- Sisaldagu anum 100 l vedelikku, kusjuures vedeliku hulk, mis voolab sisse, võrdub vedeliku hulgaga, mis voolab välja.
- Vaadi sisu segatakse pidevalt nii, et suhkru kontsentratsioon on kõikjal ühesugune.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 5 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru A kiirusega 2 l minutis.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 10 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru B kiirusega 1 l minutis.
- Suhkruvesi voolab vaadist välja toru C kaudu kiirusega 3 l minutis.

Leidke matemaatiline mudel, mis kirjeldaks suhkru koguse $S(t)$ muutumist vaadis.

Näiteid ülesannetest, mille lahendamiseks kasutatakse HDV

1. Vaatleme suurt anumat, mis sisaldab suhkruvett lahjade jookide valmistamiseks.

- Sisaldagu anum 100 l vedelikku, kusjuures vedeliku hulk, mis voolab sisse, võrdub vedeliku hulgaga, mis voolab välja.
- Vaadi sisu segatakse pidevalt nii, et suhkru kontsentratsioon on kõikjal ühesugune.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 5 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru A kiirusega 2 l minutis.
- Suhkruvesi, mis sisaldab 10 spl suhkrut 1 liitri vee kohta, voolab vaati läbi toru B kiirusega 1 l minutis.
- Suhkruvesi voolab vaadist välja toru C kaudu kiirusega 3 l minutis.

Leidke matemaatiline mudel, mis kirjeldaks suhkru koguse $S(t)$ muutumist vaadis.

2. Olgu antud meil perioodil $t = 0$ rahasumma $M_0 = 10$. See kasvab t perioodi jooksul pidevalt intressimääraga i. Leidke, kui suur on summa perioodil t.

3. Olgu teada järv, mille kalavaru ajahetkel t on $F(t)$. Kalavaru muutus on võrdne kalade loomuliku juurdekasvuga (eeldame, et see on lineaarne sõltuvalt olemasolevatest kalade hulgast) ja püügikvoodist (tähistame väljapüütavate kalade hulga $P(t)$). Seega saame DV

$$F'(t) = aF(t) - P(t),$$

kus a on positiivne konstant.

1) Kalamehed üritavad valitsust veenda, et ajas konstantne püügikvoot $P(t) = P$ viiks katastroofini, st kalavarude kadumiseni või väga suurte kalavarudeni.

2) Looduskaitsjad jälle väidavad, et eksponentsiaalne püügimäära funktsioon $P(t) = e^{pt}$ viiks sarnase tulemuseni.

Kellel on õigus?

3. Olgu teada järv, mille kalavaru ajahetkel t on $F(t)$. Kalavaru muutus on võrdne kalade loomuliku juurdekasvuga (eeldame, et see on lineaarne sõltuvalt olemasolevatest kalade hulgast) ja püügikvoodist (tähistame väljapüütavate kalade hulga $P(t)$). Seega saame DV

$$F'(t) = aF(t) - P(t),$$

kus a on positiivne konstant.
1) Kalamehed üritavad valitsust veenda, et ajas konstantne püügikvoot $P(t) = P$ viiks katastroofini, st kalavarude kadumiseni või väga suurte kalavarudeni.
2) Looduskaitsjad jälle väidavad, et eksponentsiaalne püügimäära funktsioon $P(t) = e^{pt}$ viiks sarnase tulemuseni.
Kellel on õigus?

3. Olgu teada järv, mille kalavaru ajahetkel t on $F(t)$. Kalavaru muutus on võrdne kalade loomuliku juurdekasvuga (eeldame, et see on lineaarne sõltuvalt olemasolevatest kalade hulgast) ja püügikvoodist (tähistame väljapüütavate kalade hulga $P(t)$). Seega saame DV

$$F'(t) = aF(t) - P(t),$$

kus a on positiivne konstant.
1) Kalamehed üritavad valitsust veenda, et ajas konstantne püügikvoot $P(t) = P$ viiks katastroofini, st kalavarude kadumiseni või väga suurte kalavarudeni.
2) Looduskaitsjad jälle väidavad, et eksponentsiaalne püügimäära funktsioon $P(t) = e^{pt}$ viiks sarnase tulemuseni.
Kellel on õigus?

3. Olgu teada järv, mille kalavaru ajahetkel t on $F(t)$. Kalavaru muutus on võrdne kalade loomuliku juurdekasvuga (eeldame, et see on lineaarne sõltuvalt olemasolevatest kalade hulgast) ja püügikvoodist (tähistame väljapüütavate kalade hulga $P(t)$). Seega saame DV

$$F'(t) = aF(t) - P(t),$$

kus a on positiivne konstant.
1) Kalamehed üritavad valitsust veenda, et ajas konstantne püügikvoot $P(t) = P$ viiks katastroofini, st kalavarude kadumiseni või väga suurte kalavarudeni.
2) Looduskaitsjad jälle väidavad, et eksponentsiaalne püügimäära funktsioon $P(t) = e^{pt}$ viiks sarnase tulemuseni.
Kellel on õigus?

4. Mingilt kõrguselt lastakse kukkuda keha, mille mass on m. Leidke seaduspärasus, mille järgi muutub keha langemiskiirus $v = f(t)$, kui kehale mõjub peale raskusjõu veel õhutakistus, mis on võrdeline kiirusega (võrdetegur on k).

5. Olgu $x(t)$ jäneste ja $y(t)$ huntide arv ajamomendil t. Leidke matemaatiline mudel, mis kirjeldaks nende liikide kooseksisteerimist.

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.
Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{2}$$

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.

Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{2}$$

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.

Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{2}$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.
Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{2}$$

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.

Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:

1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;

2) esimeste integraalide abil;

3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

Süsteemi lahendiks

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{cases}$$

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

Süsteemi lahendiks

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{cases}$$

Definitsioon

Piirkonnas D määratud mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

nimetatakse normaalkujulise süsteemi (4) esimeseks integraaliks, kui muutujate $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *asendamisel süsteemi (4) mistahes lahendiga* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *muutub see funktsion konstantseks* x *suhtes:*

$$\psi(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \equiv C.$$

Definitsioon

Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) esimesed integraalid $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *on sõltumatud, siis süsteemi (4) üldlahendiks ilmutamata kujul on*

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Definitsioon

Piirkonnas D määratud mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

nimetatakse normaalkujulise süsteemi (4) esimeseks integraaliks, kui muutujate $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *asendamisel süsteemi (4) mistahes lahendiga* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *muutub see funktsion konstantseks* x *suhtes:*

$$\psi(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \equiv C.$$

Definitsioon

Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) esimesed integraalid $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *on sõltumatud, siis süsteemi (4) üldlahendiks ilmutamata kujul on*

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln|y+z| - x = C_1 \\ \ln|y-z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z = C_3 e^x \\ y-z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^x + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^x - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln|y+z| - x = C_1 \\ \ln|y-z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = C_3 e^x \\ y - z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^x + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^x - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln|y+z| - x = C_1 \\ \ln|y-z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z = C_3 e^x \\ y-z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^x + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^x - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$