Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.

Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Korrutis saab olla 0, kui üks teguritest on 0. Et $e^{\lambda x} \neq 0$, siis peab sulgavaldis võrduma nulliga. Võrrandit kujul

$$p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Korrutis saab olla 0, kui üks teguritest on 0. Et $e^{\lambda x} \neq 0$, siis peab sulgavaldis võrduma nulliga. Võrrandit kujul

$$p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Korrutis saab olla 0, kui üks teguritest on 0. Et $e^{\lambda x} \neq 0$, siis peab sulgavaldis võrduma nulliga. Võrrandit kujul

$$p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Korrutis saab olla 0, kui üks teguritest on 0. Et $e^{\lambda x} \neq 0$, siis peab sulgavaldis võrduma nulliga. Võrrandit kujul

$$p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks**. Selle võrrandi lahendid λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.
Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.
Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 4: Lahendada $y^{(5)} = 6y^{(4)} - 9y^{(3)}$
Siit saame $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ja $\lambda_4 = \lambda_5 = 3$.

Näide 4: Lahendada $y^{(5)} = 6y^{(4)} - 9y^{(3)}$
Siit saame $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ja $\lambda_4 = \lambda_5 = 3$.

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused

Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused

Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused
Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused
Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_{n-1} \lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused
Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \ \ k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Vasaku poole diferentseerimisel saame

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}L(e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[p_0\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + \ldots + p_n e^{\lambda x}\right] =$$

$$= p_0\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + \ldots + p_n\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x} =$$

$$= L\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) = L(x^k e^{\lambda x})$$

Vasaku poole diferentseerimisel saame

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} L(e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[p_0 \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{\lambda x} \right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{\lambda x} \right) + \ldots + p_n e^{\lambda x} \right] =$$

$$= p_0 \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} \right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} \right) + \ldots + p_n \frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} =$$

$$= L \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} \right) = L(x^k e^{\lambda x})$$

Vasaku poole diferentseerimisel saame

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}L(e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[p_0\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + \ldots + p_n e^{\lambda x}\right] =$$

$$= p_0\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + \ldots + p_n\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x} =$$

$$= L\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) = L(x^k e^{\lambda x})$$

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, \ldots, y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

IV Kui $\lambda = \alpha \pm i\beta$ on $r-$kordne kompleksne karakteristlik väärtus, on ka vastavad lahendid $y_1, ..., , y_{2r}$ kompleksed. Lahendid saame reaal- ja imaginaarosa eraldamisega.

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x} \cos \beta x,\ ..., y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x,\ y_{r+2} = xe^{\alpha x} \sin \beta x,\ ..., y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

IV Kui $\lambda = \alpha \pm i\beta$ on $r-$kordne kompleksne karakteristlik väärtus, on ka vastavad lahendid $y_1, ..., , y_{2r}$ kompleksed. Lahendid saame reaal- ja imaginaarosa eraldamisega.

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \; y_2 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, \; ..., y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x, \; y_{r+2} = xe^{\alpha x} \sin \beta x, \; ..., y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$