Kõrgemat järku lineaarsed DV

Võrrandit

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse lineaarseks $n-$järku HDVks, kui ta on lineaarne otsitava ja tema tuletiste suhtes ehk ta on kirjutatav kujul

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Eeldame, et $p_0(x) \neq 0$, siis

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + ... + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

Kõrgemat järku lineaarsed DV

Võrrandit

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse lineaarseks $n-$järku HDVks, kui ta on lineaarne otsitava ja tema tuletiste suhtes ehk ta on kirjutatav kujul

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

Eeldame, et $p_0(x) \neq 0$, siis

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + ... + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

Kõrgemat järku lineaarsed DV

Võrrandit

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse lineaarseks $n-$järku HDVks, kui ta on lineaarne otsitava ja tema tuletiste suhtes ehk ta on kirjutatav kujul

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

Eeldame, et $p_0(x) \neq 0$, siis

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + ... + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

Moodustame Cauchy ülesande, selleks lisame lineaarsele võrrandile n algtingimust:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \end{cases} \tag{2}$$

kus $x_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}$ on konstandid.

Teoreem

Kui võrrandi (1) kordajad $p_0(x)$, $p_1(x), ..., p_n(x)$ *ja vabaliige* $f(x)$ *on pidevad vahemikus* (a, b) *ja* $x_0 \in (a, b)$, y_0, $y_0^1, ..., y_0^{n-1} \in (-\infty, \infty)$, *siis võrrandil (1) leidub parajasti üks lahend* $y = y(x)$, *mis rahuldab tingimusi (2).*

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (1) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (1')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)}\left[f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_n(x)y\right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ on pidev muutujate piirkonnas D.
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y'}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (1) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (1')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)}\left[f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_n(x)y\right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ on pidev muutujate piirkonnas D.
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (1) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (1')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)} \left[f(x) - p_1(x) y^{(n-1)} - ... - p_n(x) y \right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *on pidev muutujate piirkonnas D.*
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y'}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (1) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (1')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)} \left[f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_n(x)y \right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *on pidev muutujate piirkonnas D.*
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y'}, ..., \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (1) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (1')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)} \left[f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_n(x)y \right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *on pidev muutujate piirkonnas D.*
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y'}, ..., \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Olgu meil piirkond

$$D = \left\{ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) : a < x < b;\ -\infty < \ y, y', ..., y^{(n-1)} < \infty \right\}.$$

Kontrollime tingimusi:

1) kui $p_0(x) \neq 0$, siis on (1') pidev piirkonnas D,

2) $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{p_n(x)}{p_0(x)}$

$\frac{\partial g}{\partial y'} = -\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}$

...

$\frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$

3) on automaatselt täidetud teoreemi põhjal.

Olgu meil piirkond

$$D = \left\{(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) : a < x < b;\ -\infty < \ y, y', ..., y^{(n-1)} < \infty\right\}.$$

Kontrollime tingimusi:

1) kui $p_0(x) \neq 0$, siis on (1') pidev piirkonnas D,

2) $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{p_n(x)}{p_0(x)}$

$\frac{\partial g}{\partial y'} = -\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}$

...

$\frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$

3) on automaatselt täidetud teoreemi põhjal.

Olgu meil piirkond

$$D = \left\{ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) : a < x < b;\ -\infty < \ y, y', ..., y^{(n-1)} < \infty \right\}.$$

Kontrollime tingimusi:

1) kui $p_0(x) \neq 0$, siis on (1') pidev piirkonnas D,

2) $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{p_n(x)}{p_0(x)}$

$\frac{\partial g}{\partial y'} = -\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}$

...

$\frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$

3) on automaatselt täidetud teoreemi põhjal.

Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks**. Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks.** Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks.** Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \qquad (3)$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad (3_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (3_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (3_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{3}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (3_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (3_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (3_h) lahend.

Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{3}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (3_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (3_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (3_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{3}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (3_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (3_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (3_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 Ly_1 + C_2 Ly_2 + ... + C_n Ly_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \qquad (3)$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad (3_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (3_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (3_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 Ly_1 + C_2 Ly_2 + ... + C_n Ly_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{3}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (3_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (3_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (3_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 Ly_1 + C_2 Ly_2 + ... + C_n Ly_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{3}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (3_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (3_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (3_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus (a, b), kui leiduvad kordajad $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ nii, et

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, nimetatakse funktsioone $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ lineaarselt sõltumatuteks.

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus (a, b), kui leiduvad kordajad $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ nii, et

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, nimetatakse funktsioone $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ lineaarselt sõltumatuteks.

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ *nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus* (a, b), *kui leiduvad kordajad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ *nii, et*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *nimetatakse funktsioone* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *lineaarselt sõltumatuteks.*

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ *nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus* (a, b), *kui leiduvad kordajad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ *nii, et*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *nimetatakse funktsioone* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *lineaarselt sõltumatuteks.*

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1,\ \ y_2 = \sin^2 x,\ \ y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)

Valime $\alpha_1 = -1,\ \ \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.

2) Olgu $y_1 = 1,\ \ y_2 = x,\ \ y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1,\ \ y_2 = \sin^2 x,\ \ y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1,\ \ \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.
2) Olgu $y_1 = 1,\ \ y_2 = x,\ \ y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1, \;\; y_2 = \sin^2 x, \;\; y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1, \;\; \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.
2) Olgu $y_1 = 1, \; y_2 = x, \; y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1,\ \ y_2 = \sin^2 x,\ \ y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1,\ \ \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.
2) Olgu $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (3_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (3_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (3_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Näide: Vaatame jällegi funktsioone $y_1 = 1,\ y_2 = \sin^2 x,\ y_3 = \cos^2 x$. Moodustame Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 2x = 0.$$

Näide: Vaatame jällegi funktsioone $y_1 = 1,\ y_2 = \sin^2 x,\ y_3 = \cos^2 x$. Moodustame Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 2x = 0.$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ võrrandi (3_h) lahendid. Siis
I *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \equiv 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.*
II *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.*

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* (3_h) *lahendid. Siis*
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.
II $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ võrrandi (3_h) lahendid. Siis
I *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.*
II *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.*

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*). Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* (3_h) *lahendid. Siis*
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.
II $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Saadud seost diferentseerides saame

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(k)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(k)}(x)].$$

Kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_{n-1}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)] \\ y_1'(x) & ... & y_{n-1}'(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1'(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}'(x)] \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x)] \end{vmatrix} =$$

Saadud seost diferentseerides saame

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(k)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(k)}(x)].$$

Kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_{n-1}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)] \\ y_1'(x) & ... & y_{n-1}'(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1'(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}'(x)] \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x)] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & 0 \\ y_1'(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud.Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b) : \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi α_i-de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & 0 \\ y_1'(x) & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b) : \quad W(x_0) = 0.$ Saame välja kirjutada algebralise süsteemi α_i-de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & 0 \\ y_1'(x) & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud.Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b) : \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi α_i-de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & 0 \\ y_1'(x) & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud.Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b): \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi $\alpha_i -$de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_i on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, ..., \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_i on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \dots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_i on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \dots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (3_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (3_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (3_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (3_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$.Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$.Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$.Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (3_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b);
2) $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$;
3) leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) = 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (3_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b);
2) $W(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$;
3)leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (3_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b);
2) $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$;
3) leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) = 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (3_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b);
2) $W(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$;
3)leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (3_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on kas* $W(x) = 0\ \ \forall x \in (a, b)$ *korral või* $W(x) \neq 0$ *kõigi* $x \in (a, b)$.