Homogeenne DV

Vaatame funktsiooni $f(x, y)$, mis on määratud $D \subset \mathbf{R}$. Olgu D selline, et $\forall (x, y) \in D$ korral $(tx, ty) \in D$ $\forall t > 0$.

Definitsioon

Funktsiooni $F(x, y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x, y)$$

$\forall t > 0$, $\forall (x, y) \in D$.

Homogeenne DV

Vaatame funktsiooni $f(x, y)$, mis on määratud $D \subset \mathbf{R}$. Olgu D selline, et $\forall (x, y) \in D$ korral $(tx, ty) \in D$ $\forall t > 0$.

Definitsioon

Funktsiooni $F(x, y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x, y)$$

$\forall t > 0, \forall (x, y) \in D.$

Homogeenne DV

Vaatame funktsiooni $f(x,y)$, mis on määratud $D \subset \mathbf{R}$. Olgu D selline, et $\forall (x,y) \in D$ korral $(tx, ty) \in D$ $\forall t > 0$.

Definitsioon

Funktsiooni $F(x,y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x,y)$$

$\forall t > 0$, $\forall (x,y) \in D$.

Näiteks on funktsioonid

$$f(x,y) = \frac{y-x}{x}$$

$$g(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$$

homogeensed funktsioonid, ent

$$h(x,y) = \frac{x^3 + x^2 y}{2 - y^3}$$

ei ole homogeenne.

Näiteks on funktsioonid

$$f(x, y) = \frac{y - x}{x}$$

$$g(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$$

homogeensed funktsioonid, ent

$$h(x, y) = \frac{x^3 + x^2 y}{2 - y^3}$$

ei ole homogeenne.

Näiteks on funktsioonid

$$f(x, y) = \frac{y - x}{x}$$

$$g(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$$

homogeensed funktsioonid, ent

$$h(x, y) = \frac{x^3 + x^2 y}{2 - y^3}$$

ei ole homogeenne.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ nimetatakse homogeenseks, kui $f(x, y)$ on $0-$astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad t > 0.$$

Lause

Homogeenne DV $y' = f(x, y)$ taandub muutujate (x, u) suhtes eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega $u = \frac{y}{x}$.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ nimetatakse homogeenseks, kui $f(x, y)$ on $0-$astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad t > 0.$$

Lause

Homogeenne DV $y' = f(x, y)$ taandub muutujate (x, u) suhtes eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega $u = \frac{y}{x}$.

Lineaarne DV

Esimest järku lineaarse DV üldkuju on

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0,$$

kus $A(x)$ ja $B(x)$ on võrrandi kordajad ning $C(x)$ on vabaliige.
Kui $A(x) \neq 0$, siis saab võrrandi viia kujule

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Lisame algtingimuse

$$y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

ning moodustame Cauchy ülesande {(1),(2)}.

Lineaarne DV

Esimest järku lineaarse DV üldkuju on

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0,$$

kus $A(x)$ ja $B(x)$ on võrrandi kordajad ning $C(x)$ on vabaliige.
Kui $A(x) \neq 0$, siis saab võrrandi viia kujule

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Lisame algtingimuse

$$y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

ning moodustame Cauchy ülesande {(1),(2)}.

Lineaarne DV

Esimest järku lineaarse DV üldkuju on

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0,$$

kus $A(x)$ ja $B(x)$ on võrrandi kordajad ning $C(x)$ on vabaliige.
Kui $A(x) \neq 0$, siis saab võrrandi viia kujule

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Lisame algtingimuse

$$y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

ning moodustame Cauchy ülesande {(1),(2)}.

Lause

Olgu $p(x)$ ja $q(x)$ pidevad vahemikus (a, b) ning $x_0 \in (a, b)$. Siis leidub võrrandil (1) parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust (2).

Tõestus

Lause saab tõestada Cauchy teoreemi abil (vt esimene loeng).

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:

Lause

Olgu $p(x)$ ja $q(x)$ pidevad vahemikus (a, b) ning $x_0 \in (a, b)$. Siis leidub võrrandil (1) parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust (2).

Tõestus

Lause saab tõestada Cauchy teoreemi abil (vt esimene loeng).

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:

Lause

Olgu $p(x)$ ja $q(x)$ pidevad vahemikus (a, b) ning $x_0 \in (a, b)$. Siis leidub võrrandil (1) parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust (2).

Tõestus

Lause saab tõestada Cauchy teoreemi abil (vt esimene loeng).

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:

I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit). Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit). Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).

Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).

Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).
Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).
Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).
Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Näide: Lahendada $u' + \frac{1}{x}u = -1$.

Lahendiks on $u = \frac{c}{x^2} - \frac{x}{3}$.

Näide: Lahendada $u' + \frac{1}{x}u = -1$.

Lahendiks on $u = \frac{c}{x^2} - \frac{x}{3}$.