YMX0280 Diferentsiaalvõrrandid

30.08.2021

Diferentsiaalvõrrandite põhimõisted

Diferentsiaalvõrrandiks (DV) nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
Harilik diferentsiaalvõrrand - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

Näiteks $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
Osatuletistega diferentsiaalvõrrand - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

Näiteks $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
Integraalkõver, -pind - lahendi graafik.
DV lahendamine - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

Diferentsiaalvõrrandite põhimõisted

Diferentsiaalvõrrandiks (DV) nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
Harilik diferentsiaalvõrrand - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

Näiteks $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
Osatuletistega diferentsiaalvõrrand - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

Näiteks $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
Integraalkõver, -pind - lahendi graafik.
DV lahendamine - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

Diferentsiaalvõrrandite põhimõisted

Diferentsiaalvõrrandiks (DV) nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
Harilik diferentsiaalvõrrand - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

Näiteks $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
Osatuletistega diferentsiaalvõrrand - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

Näiteks $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
Integraalkõver, -pind - lahendi graafik.
DV lahendamine - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

Diferentsiaalvõrrandite põhimõisted

Diferentsiaalvõrrandiks (DV) nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
Harilik diferentsiaalvõrrand - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

Näiteks $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
Osatuletistega diferentsiaalvõrrand - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

Näiteks $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
Integraalkõver, -pind - lahendi graafik.
DV lahendamine - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

Diferentsiaalvõrrandite põhimõisted

Diferentsiaalvõrrandiks (DV) nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
Harilik diferentsiaalvõrrand - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

Näiteks $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
Osatuletistega diferentsiaalvõrrand - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

Näiteks $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
Integraalkõver, -pind - lahendi graafik.
DV lahendamine - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

Diferentsiaalvõrrandite põhimõisted

Diferentsiaalvõrrandiks (DV) nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
Harilik diferentsiaalvõrrand - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

Näiteks $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
Osatuletistega diferentsiaalvõrrand - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

Näiteks $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
Integraalkõver, -pind - lahendi graafik.
DV lahendamine - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

Diferentsiaalvõrrandite põhimõisted

Diferentsiaalvõrrandiks (DV) nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
Harilik diferentsiaalvõrrand - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

Näiteks $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
Osatuletistega diferentsiaalvõrrand - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

Näiteks $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
Integraalkõver, -pind - lahendi graafik.
DV lahendamine - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

Esimest järku harilikud DV

Esimest järku harilik diferentsiaalvõrrandi (HDV) **üldkuju**:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ otsitav funktsioon ja $y' = \frac{dy}{dx}$ otsitava funktsiooni tuletis.

Esimest järku HDV **normaalkuju**:

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Esimest järku HDV **sümmeetriline kuju**:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (3)$$

Esimest järku harilikud DV

Esimest järku harilik diferentsiaalvõrrandi (HDV) **üldkuju**:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ otsitav funktsioon ja $y' = \frac{dy}{dx}$ otsitava funktsiooni tuletis.
Esimest järku HDV **normaalkuju**:

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Esimest järku HDV **sümmeetriline kuju**:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (3)$$

Esimest järku harilikud DV

Esimest järku harilik diferentsiaalvõrrandi (HDV) **üldkuju**:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ otsitav funktsioon ja $y' = \frac{dy}{dx}$ otsitava funktsiooni tuletis.
Esimest järku HDV **normaalkuju**:

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Esimest järku HDV **sümmeetriline kuju**:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (3)$$

Definitsioon

Olgu funktsioon $F(x, y, z)$ määratud xyz-ruumi piirkonnas G. Vahemikus (a, b) määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse võrrandi (1) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning $(x, y(x), y'(x)) \in G$ ja $F(x, y(x), y'(x)) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon

Olgu funktsioon $f(x, y)$ määratud xy-ruumi piirkonnas D. Vahemikus (a, b) määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse võrrandi (2) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning $(x, y(x)) \in D$ ja $y'(x) = f(x, y(x)) \ \forall x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon

Olgu funktsioon $F(x, y, z)$ määratud xyz-ruumi piirkonnas G. Vahemikus (a, b) määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse võrrandi (1) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning $(x, y(x), y'(x)) \in G$ ja $F(x, y(x), y'(x)) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon

Olgu funktsioon $f(x, y)$ määratud xy-ruumi piirkonnas D. Vahemikus (a, b) määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse võrrandi (2) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning $(x, y(x)) \in D$ ja $y'(x) = f(x, y(x)) \ \forall x \in (a, b)$ korral.

Cauchy ülesanne esimest järku HDV jaoks:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (2) \\ y(x_0) = y_0, & (4) \end{cases}$$

kus $x_0,\ y_0$ on mingid antud reaalarvud.

Teoreem

Olgu $f(x, y)$ pidev kahe muutuja funktsioon piirkonnas D. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.

Teoreem on tuntud ka Peano teoreemi või lahendi olemasolu teoreemina.

Cauchy ülesanne esimest järku HDV jaoks:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (2) \\ y(x_0) = y_0, & (4) \end{cases}$$

kus $x_0,\ y_0$ on mingid antud reaalarvud.

Teoreem

Olgu $f(x, y)$ pidev kahe muutuja funktsioon piirkonnas D. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.

Teoreem on tuntud ka Peano teoreemi või lahendi olemasolu teoreemina.

Cauchy ülesanne esimest järku HDV jaoks:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (2) \\ y(x_0) = y_0, & (4) \end{cases}$$

kus $x_0,\ y_0$ on mingid antud reaalarvud.

Teoreem

Olgu $f(x, y)$ pidev kahe muutuja funktsioon piirkonnas D. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.

Teoreem on tuntud ka Peano teoreemi või lahendi olemasolu teoreemina.

Teoreem

Olgu $f(x,y)$ pidev piirkonnas D ning olgu tal selles piirkonnas olemas pidev osatuletis $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.

See teoreem on Cauchy teoreem ehk lahendi ühesuse teoreem.

Definitsioon

Võrrandi (2) üldlahendiks piirkonnas D nimetatakse suvalisest konstandist C sõltuvat lahendit $y = y(x, C)$, mille korral iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral leidub konstandi C selline väärtus C_0, et lahend $y = y(x, C_0)$ rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.

Teoreem

Olgu $f(x, y)$ pidev piirkonnas D ning olgu tal selles piirkonnas olemas pidev osatuletis $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.

See teoreem on Cauchy teoreem ehk lahendi ühesuse teoreem.

Definitsioon

Võrrandi (2) üldlahendiks piirkonnas D nimetatakse suvalisest konstandist C sõltuvat lahendit $y = y(x, C)$, mille korral iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral leidub konstandi C selline väärtus C_0, et lahend $y = y(x, C_0)$ rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.

Teoreem

Olgu $f(x, y)$ pidev piirkonnas D ning olgu tal selles piirkonnas olemas pidev osatuletis $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.

See teoreem on Cauchy teoreem ehk lahendi ühesuse teoreem.

Definitsioon

Võrrandi (2) üldlahendiks piirkonnas D nimetatakse suvalisest konstandist C sõltuvat lahendit $y = y(x, C)$, mille korral iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral leidub konstandi C selline väärtus C_0, et lahend $y = y(x, C_0)$ rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.

Definitsioon

Võrrandi (2) erilahendiks nimetatakse lahendit, mis saadakse üldlahendist konstandi C fikseerimisega.

Näited ülesannetest, mis toovad I järku HDVni

Kasvamine ja kahanemine

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

kus otsitav on $x = x(t)$, tema tuletis $x' = \frac{dx}{dt}$, t on sõltumatu muutuja ja k on võrdetegur.

Radioktiivne lagunemine

Olgu $x(t)$ radioktiivse aine mass ajamomendil t. Suurus $x'(t)$ väljendab radioktiivse lagunemise kiirust. Vastavalt radioktiivse lagunemise seadusele on lagunemise kiirus $x'(t)$ võrdeline veel lagunemata aine hulgaga $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -ax.$$

Üldlahend: $x = Ce^{-at}$.

Näited ülesannetest, mis toovad I järku HDVni

Kasvamine ja kahanemine

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

kus otsitav on $x = x(t)$, tema tuletis $x' = \frac{dx}{dt}$, t on sõltumatu muutuja ja k on võrdetegur.

Radioktiivne lagunemine

Olgu $x(t)$ radioktiivse aine mass ajamomendil t. Suurus $x'(t)$ väljendab radioktiivse lagunemise kiirust. Vastavalt radioktiivse lagunemise seadusele on lagunemise kiirus $x'(t)$ võrdeline veel lagunemata aine hulgaga $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -ax.$$

Üldlahend: $x = Ce^{-at}$.

Näited ülesannetest, mis toovad I järku HDVni

Kasvamine ja kahanemine

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

kus otsitav on $x = x(t)$, tema tuletis $x' = \frac{dx}{dt}$, t on sõltumatu muutuja ja k on võrdetegur.

Radioktiivne lagunemine

Olgu $x(t)$ radioktiivse aine mass ajamomendil t. Suurus $x'(t)$ väljendab radioktiivse lagunemise kiirust. Vastavalt radioktiivse lagunemise seadusele on lagunemise kiirus $x'(t)$ võrdeline veel lagunemata aine hulgaga $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -ax.$$

Üldlahend: $x = Ce^{-at}$.

Cauchy ülesande (algtingimus $x(0) = x_0$) lahend: $\quad x = x_0 e^{-at}$.

Populatsiooni arvukus
Malthusi mudel
Olgu $y(t)$ mingi bioloogilise liigi isendite arv ajahetkel t ($y(t) \geq 0$.) Liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on proportsionaalne isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

DV lahend $y = y_0 e^{kt}$, kus y_0 on isendite arv alghetkel.

Cauchy ülesande (algtingimus $x(0) = x_0$) lahend: $\quad x = x_0 e^{-at}$.

Populatsiooni arvukus
Malthusi mudel
Olgu $y(t)$ mingi bioloogilise liigi isendite arv ajahetkel t ($y(t) \geq 0$.) Liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on proportsionaalne isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

DV lahend $y = y_0 e^{kt}$, kus y_0 on isendite arv alghetkel.

Näide: Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel t. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.
$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

Näide: Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel t. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.

$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

Näide: Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel t. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.
$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

Näide: Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel t. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.
$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

Näide: Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel t. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.
$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

Verhulsti mudel

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2,$$

kus $a,\ b$ on konstandid, $y = y(t)$ otsitav ja t on sõltumatu muutuja.

Soojenemine ja jahenemine

Olgu ajahetkel t keha temperatuur $T(t)$, seda keha ümbritseva õhu temperatuur T_0, siis keha temperatuuri muutus on kirjeldatav

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

kus $k > 0$ on võrdetegur.
Lahend: $T = T_0 + Ce^{-kt}$.

Soojenemine ja jahenemine

Olgu ajahetkel t keha temperatuur $T(t)$, seda keha ümbritseva õhu temperatuur T_0, siis keha temperatuuri muutus on kirjeldatav

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

kus $k > 0$ on võrdetegur.

Lahend: $T = T_0 + Ce^{-kt}$.

Soojenemine ja jahenemine
Olgu ajahetkel t keha temperatuur $T(t)$, seda keha ümbritseva õhu temperatuur T_0, siis keha temperatuuri muutus on kirjeldatav

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

kus $k > 0$ on võrdetegur.
Lahend: $T = T_0 + Ce^{-kt}$.

Näide: Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?

Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

Näide: Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?
Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

Näide: Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?

Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

Näide: Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?
Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

Näide: Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?

Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

Määrame konstandi k :

$$k = \frac{1}{10} \ln \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0} \right) = \frac{1}{10} \ln \left(\frac{18 - 30,5}{23 - 30,5} \right) =$$

$$= \frac{1}{10} \ln \left(\frac{12,5}{7,5} \right) = 0.051$$

$$T(t) = 30,5 + (18 - 30,5) e^{-0,051 t} =$$

$$= 30,5 - 12,5 e^{-0,051 t}$$

Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks on eralduvate muutujatega DV

$$2xdx - \sin y dy = 0,$$

samuti

$$e^x = \ln y \cdot y'.$$

Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \qquad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks on eralduvate muutujatega DV

$$2xdx - \sin y dy = 0,$$

samuti

$$e^x = \ln y \cdot y'.$$

Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \qquad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks on eralduvate muutujatega DV

$$2xdx - \sin y dy = 0,$$

samuti

$$e^x = \ln y \cdot y'.$$

Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \qquad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks on eralduvate muutujatega DV

$$2xdx - \sin ydy = 0,$$

samuti

$$e^x = \ln y \cdot y'.$$

Teoreem

Olgu $M(x)$ pidev vahemikus (a, b), ja $N(y)$ pidev vahemikus (α, β) ning $\forall\ (x, y) \in D = \{(x, y) : x \in (a, b),\ \ y \in (\alpha, \beta)\}$ korral $M^2(x) + N^2(y) \neq 0$, siis on võrrandi (1) üldlahendiks

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \qquad (2)$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0, \qquad (2')$$

kus (x_0, y_0) on suvaline fikseeritud punkt piirkonnas D.

Teoreem

Olgu $M(x)$ pidev vahemikus (a, b), ja $N(y)$ pidev vahemikus (α, β) ning $\forall\ (x, y) \in D = \{(x, y) : x \in (a, b),\ \ y \in (\alpha, \beta)\}$ korral $M^2(x) + N^2(y) \neq 0$, siis on võrrandi (1) üldlahendiks

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \qquad (2)$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0, \qquad (2')$$

kus (x_0, y_0) on suvaline fikseeritud punkt piirkonnas D.

Tõestus

I Näitame, et (1)$\Longleftrightarrow$(2).

II Näitame, et Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} M(x)dx + N(y)dy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on üheselt lahenduv ning lahend esitub kujul

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0.$$

Tõestus

I Näitame, et (1)$\Longleftrightarrow$(2).
II Näitame, et Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} M(x)dx + N(y)dy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on üheselt lahenduv ning lahend esitub kujul

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0.$$

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.

Olgu $\Phi(x,y)$ korral täidetud:

a) $\Phi(x,y)$, $\Phi_x(x,y)$ ja $\Phi_y(x,y)$ määratud ja pidevad punkti (x_0,y_0) mingis ümbruses;

b) $\Phi(x_0,y_0)=0$;

c) $\Phi_y(x_0,y_0)\neq 0$. (või $\Phi_x(x_0,y_0)\neq 0$)

Siis $\Phi(x,y)=0$ esitab parajasti ühe funktsiooni $y=\varphi(x)$ (või $x=\xi(y)$), millel on järgmised omadused:

1) $\varphi(x)$ ($\xi(y)$) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv x_0 (y_0) mingis ümbruses ;

2) $\varphi(x_0)=y_0$ ($\xi(y_0)=x_0$);

3) $\Phi(x,\varphi(x))\equiv 0$ x_0 mingis ümbruses ($\Phi(\xi(y),y)\equiv 0$ y_0 mingis ümbruses).

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.

Olgu $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*

a) $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* (x_0, y_0) *mingis ümbruses;*

b) $\Phi(x_0, y_0) = 0$*;*

c) $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*

Siis $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*

1) $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* x_0 *(*y_0*) mingis ümbruses ;*

2) $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*

3) $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ x_0 *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ y_0 *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.
Olgu $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*
a) $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* (x_0, y_0) *mingis ümbruses;*
b) $\Phi(x_0, y_0) = 0$;
c) $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*
Siis $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*
1) $\varphi(x)$ $(\xi(y))$ *on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* x_0 (y_0) *mingis ümbruses ;*
2) $\varphi(x_0) = y_0$ $(\xi(y_0) = x_0)$*;*
3) $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ x_0 *mingis ümbruses* $(\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ y_0 *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.
Olgu $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*
a) $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* (x_0, y_0) *mingis ümbruses;*
b) $\Phi(x_0, y_0) = 0$;
c) $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*
Siis $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*
1) $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* x_0 *(*y_0*) mingis ümbruses ;*
2) $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*
3) $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ x_0 *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ y_0 *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.

Olgu $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*

a) $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* (x_0, y_0) *mingis ümbruses;*

b) $\Phi(x_0, y_0) = 0$;

c) $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*

Siis $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*

1) $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* x_0 *(*y_0*) mingis ümbruses ;*

2) $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*

3) $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ x_0 *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ y_0 *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.
Olgu $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*
a) $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* (x_0, y_0) *mingis ümbruses;*
b) $\Phi(x_0, y_0) = 0$;
c) $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*
Siis $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*
1) $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* x_0 *(*y_0*) mingis ümbruses ;*
2) $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*
3) $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ x_0 *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ y_0 *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.

Olgu $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*

a) $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* (x_0, y_0) *mingis ümbruses;*

b) $\Phi(x_0, y_0) = 0$;

c) $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*

Siis $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*

1) $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* x_0 *(*y_0*) mingis ümbruses ;*

2) $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*

3) $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ x_0 *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ y_0 *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.
Olgu $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*
a) $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* (x_0, y_0) *mingis ümbruses;*
b) $\Phi(x_0, y_0) = 0$;
c) $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*
Siis $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*
1) $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* x_0 *(*y_0*) mingis ümbruses ;*
2) $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*
3) $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ x_0 *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ y_0 *mingis ümbruses).*

Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x),\ N_1(y),\ M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x),\ N_1(y),\ M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x),\ N_1(y),\ M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x),\ N_1(y),\ M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

(5) üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

(5) üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

(5) üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

Homogeenne DV

Vaatame funktsiooni $f(x, y)$, mis on määratud $D \subset \mathbf{R}$. Olgu D selline, et $\forall (x, y) \in D$ korral $(tx, ty) \in D \; \forall t > 0$.

Definitsioon

Funktsiooni $F(x, y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x, y)$$

$\forall t > 0, \forall (x, y) \in D$.

Homogeenne DV

Vaatame funktsiooni $f(x, y)$, mis on määratud $D \subset \mathbf{R}$. Olgu D selline, et $\forall (x, y) \in D$ korral $(tx, ty) \in D$ $\forall t > 0$.

Definitsioon

Funktsiooni $F(x, y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x, y)$$

$\forall t > 0$, $\forall (x, y) \in D$.

Näiteks on funktsioonid

$$f(x, y) = \frac{y - x}{x}$$

$$g(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$$

homogeensed funktsioonid, ent

$$h(x, y) = \frac{x^3 + x^2 y}{2 - y^3}$$

ei ole homogeenne.

Näiteks on funktsioonid

$$f(x, y) = \frac{y - x}{x}$$

$$g(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$$

homogeensed funktsioonid, ent

$$h(x, y) = \frac{x^3 + x^2 y}{2 - y^3}$$

ei ole homogeenne.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ nimetatakse homogeenseks, kui $f(x, y)$ on $0-$astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad t > 0.$$

Lause

Homogeenne DV $y' = f(x, y)$ taandub muutujate (x, u) suhtes eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega $u = \frac{y}{x}$.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ nimetatakse homogeenseks, kui $f(x, y)$ on $0-$astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad t > 0.$$

Lause

Homogeenne DV $y' = f(x, y)$ taandub muutujate (x, u) suhtes eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega $u = \frac{y}{x}$.