Konstantide varieerimine...

...ehk Lagrange'i meetod.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$.

Konstantide varieerimine...

...ehk Lagrange'i meetod.

Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$.

Konstantide varieerimine...

...ehk Lagrange'i meetod.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$.

Konstantide varieerimine...

...ehk Lagrange'i meetod.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$.

Konstantide varieerimine...

...ehk Lagrange'i meetod.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$.

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$
$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$
$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$
$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)]+$$

$$C_1(x)[p_0(x)y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_1] + ...+$$

$$+C_n(x)[p_0(x)y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_n] = f(x)$$

Seega

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] = f(x)$$

Siit

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] +$$
$$C_1(x)[p_0(x)y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_1] + ... +$$
$$+C_n(x)[p_0(x)y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_n] = f(x)$$

Seega

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] = f(x)$$

Siit

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandit kujul

$$p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandit kujul

$$p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.

Võrrandit kujul

$$p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i on **karakteristlikud väärtused.**

Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandit kujul

$$p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandit kujul

$$p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandit kujul

$$p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}, \; ...., y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikukuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ja $v = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ja $v = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikukuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Näide: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused

Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused
Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused

Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused
Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ...,\Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused
Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ...,\Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \frac{d}{dx} e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda)e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \frac{d}{dx} e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \frac{d}{dx} e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \ \ k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \frac{d}{dx} e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \quad k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \frac{d}{dx} e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Vasaku poole diferentseerimisel saame

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}L(e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(p_0\frac{d^n}{dx^n}e^{\lambda x} + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x}\right) =$$

$$= p_0\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + ... + p_n\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x} =$$

$$= L\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) = L(x^k e^{\lambda x})$$

Vasaku poole diferentseerimisel saame

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}L(e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(p_0\frac{d^n}{dx^n}e^{\lambda x} + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x}\right) =$$

$$= p_0\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + ... + p_n\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x} =$$

$$= L\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) = L(x^k e^{\lambda x})$$

Vasaku poole diferentseerimisel saame

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}L(e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(p_0\frac{d^n}{dx^n}e^{\lambda x} + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x}\right) =$$

$$= p_0\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + ... + p_n\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x} =$$

$$= L\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) = L(x^k e^{\lambda x})$$

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \Lambda^{(j)}(\lambda) x^{k-j} e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \Lambda^{(j)}(\lambda) x^{k-j} e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \Lambda^{(j)}(\lambda) x^{k-j} e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \Lambda^{(j)}(\lambda) x^{k-j} e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

IV Kui $\lambda = \alpha \pm i\beta$ on $r-$kordne kompleksne karakteristlik väärtus, on ka vastavad lahendid $y_1, ...,, y_{2r}$ kompleksed. Lahendid saame reaal- ja imaginaarosa eraldamisega.

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x} \cos \beta x,\ ..., y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x,\ y_{r+2} = xe^{\alpha x} \sin \beta x,\ ..., y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

IV Kui $\lambda = \alpha \pm i\beta$ on $r-$kordne kompleksne karakteristlik väärtus, on ka vastavad lahendid $y_1, ..., , y_{2r}$ kompleksed. Lahendid saame reaal- ja imaginaarosa eraldamisega.

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x,\ ..., y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x,\ y_{r+2} = x e^{\alpha x} \sin \beta x,\ ..., y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \qquad (1)$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{\alpha x} A_m(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m)$$

Lause

Kui arv α ei ole lin. homogeense võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) üks lahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.
Kui arv α on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s e^{\alpha x} P_m(x) =$$

$$= x^s e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus q_i on määramata kordajad.

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{\alpha x} A_m(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m)$$

Lause

Kui arv α ei ole lin. homogeense võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) üks lahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.
Kui arv α on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s e^{\alpha x} P_m(x) =$$

$$= x^s e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m),$$

kus q_i on määramata kordajad.

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{\alpha x} A_m(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m)$$

Lause

Kui arv α ei ole lin. homogeense võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) üks lahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.

Kui arv α on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s e^{\alpha x} P_m(x) =$$

$$= x^s e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus q_i on määramata kordajad.

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{\alpha x} A_m(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m)$$

Lause

Kui arv α ei ole lin. homogeense võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) üks lahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus p_i on määramata kordajad.
Kui arv α on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s e^{\alpha x} P_m(x) =$$
$$= x^s e^{\alpha x}(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_m),$$

kus q_i on määramata kordajad.

B Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = A_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Lause

Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ei ole võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kus P_m, Q_n on sama astme polünoomid kui A_m, B_n.
Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub lahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s\left[P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

B Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = A_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Lause

Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ei ole võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kus P_m, Q_n on sama astme polünoomid kui A_m, B_n.

Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub lahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s\left[P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

B Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = A_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Lause

Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ei ole võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kus P_m, Q_n on sama astme polünoomid kui A_m, B_n.
Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ on $s-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub lahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^s\left[P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

C Olgu $Ly = f(x)$, kus $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f_1(x)$ erilahend y_{*1} ning y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

C Olgu $Ly = f(x)$, kus $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f_1(x)$ erilahend y_{*1} ning y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

C Olgu $Ly = f(x)$, kus $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f_1(x)$ erilahend y_{*1} ning y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

C Olgu $Ly = f(x)$, kus $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f_1(x)$ erilahend y_{*1} ning y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.
Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.

Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.

Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (3)$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.
Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ pidevad muutujate $x, y_1, y_2, ..., y_n$ piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ja nende osatuletised $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ määratud ja pidevad muutujate $x, y_1, y_2, ..., y_n$ piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.

Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:

1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;

2) esimeste integraalide abil;

3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

Süsteemi lahendiks

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{cases}$$

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

Süsteemi lahendiks

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{cases}$$

Definitsioon

Piirkonnas D määratud mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

nimetatakse normaalkujulise süsteemi (4) esimeseks integraaliks, kui muutujate $y_1, y_2, \ldots, y_n$ asendamisel süsteemi (4) mistahes lahendiga $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ muutub see funktsion konstantseks x suhtes:

$$\psi(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \equiv C.$$

Definitsioon

Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) esimesed integraalid $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on sõltumatud, siis süsteemi (4) üldlahendiks ilmutamata kujul on

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Definitsioon

Piirkonnas D määratud mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

nimetatakse normaalkujulise süsteemi (4) esimeseks integraaliks, kui muutujate $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *asendamisel süsteemi (4) mistahes lahendiga* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *muutub see funktsion konstantseks* x *suhtes:*

$$\psi(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \equiv C.$$

Definitsioon

Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) esimesed integraalid $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *on sõltumatud, siis süsteemi (4) üldlahendiks ilmutamata kujul on*

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln|y+z| - x.$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\ln|y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln|y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln|y+z| - x = C_1 \\ \ln|y-z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = C_3 e^x \\ y - z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^x + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^x - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln|y+z| - x = C_1 \\ \ln|y-z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z = C_3 e^x \\ y-z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^x + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^x - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln|y+z| - x = C_1 \\ \ln|y-z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z = C_3 e^x \\ y-z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^x + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^x - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$