Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ võrrandi (1_h) lahendid. Siis
I *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.*
II *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.*

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* (1_h) *lahendid. Siis*
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.
II $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* (1_h) *lahendid. Siis*
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.
II $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b);
2) $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$;
3) leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) = 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b);
2) $W(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$;
3)leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b);
2) $W(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b)$;
3) leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) = 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b);
2) $W(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$;
3)leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on kas* $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ *korral või* $W(x) \neq 0$ *kõigi* $x \in (a, b)$.

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ on pidevad funktsioonid vahemikus (a, b), siis leidub võrrandi $Ly = 0$ jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ ning lisame erinevaid algtingimusi.

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* (a, b), *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* (a, b), *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* (a, b), *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* (a, b), *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

Olgu siis esimene ülesanne

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

kus $x_0 \in (a, b)$. Teine Cauchy ülesanne:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Olgu siis esimene ülesanne

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

kus $x_0 \in (a, b)$. Teine Cauchy ülesanne:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.
Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Kuna Wronski determinant on nullist erinev, siis on funktsioonid lineaarselt sõltumatud ja moodustavad LFS.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Kuna Wronski determinant on nullist erinev, siis on funktsioonid lineaarselt sõltumatud ja moodustavad LFS.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem, siis selle võrrandi üldlahend avaldub kujul $y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem, $y_*(x)$ võrrandi $Ly = f(x)$ üks lahend, siis võrrandi $Ly = f(x)$ üldlahend on kujul $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y_*(x)$.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem, siis selle võrrandi üldlahend avaldub kujul $y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem, $y_*(x)$ võrrandi $Ly = f(x)$ üks lahend, siis võrrandi $Ly = f(x)$ üldlahend on kujul $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y_*(x)$.

Tõestus

Omaduse 2 põhjal saame öelda, et

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$$

on $Ly = f(x)$ lahend. Nüüd on vaja veel veenduda, et mistahes $x_0 \in (a, b)$ ja mistahes $y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)}$ korral leiduvad konstandid $C_1, C_2, ..., C_n$ nii, et funktsioon $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ rahuldab algtingimusi

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Tõestus

Omaduse 2 põhjal saame öelda, et

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$$

on $Ly = f(x)$ *lahend. Nüüd on vaja veel veenduda, et mistahes* $x_0 \in (a, b)$ *ja mistahes* $y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)}$ *korral leiduvad konstandid* $C_1, C_2, ..., C_n$ *nii, et funktsioon* $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ *rahuldab algtingimusi*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures y_* viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + ... + C_ny_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + ... + C_ny_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ ... \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures y_* viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures y_* viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ ... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$.
Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures y_* viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.
KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.
KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.
KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.

Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.

Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)]+$$

$$+p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)]+$$
$$C_1(x)[p_0(x)y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+...+p_n(x)y_1]+...+$$
$$+C_n(x)[p_0(x)y_n^{(n)}+p_1(x)y_n^{(n-1)}+...+p_n(x)y_n]=f(x)$$

Seega

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)]=f(x)$$

Siit

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+...+C_n'(x)y_n'(x)=0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}+...+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=\frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)]+$$

$$C_1(x)[p_0(x)y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+...+p_n(x)y_1]+...+$$

$$+C_n(x)[p_0(x)y_n^{(n)}+p_1(x)y_n^{(n-1)}+...+p_n(x)y_n]=f(x)$$

Seega

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)]=f(x)$$

Siit

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+...+C_n'(x)y_n'(x)=0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}+...+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=\frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C'_1(x), ..., C'_n(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & ... & y'_n(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C'_i(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$

II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla lineaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.
Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi.
Uue lahendi y_2 saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla lineaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.

Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi. Uue lahendi y_2 saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla lineaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.

Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi. Uue lahendi y_2 saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.

Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.

Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}, C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$, $C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^x dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^x$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x} \cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x\cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x} \cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x\cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x\cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.

Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, ehk

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Võrrandil võiks leiduda lahend kujul $y = e^{\lambda x}$. Asendame y ning selle tuletised $y' = \lambda e^{\lambda x}$,...,$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ võrrandisse, saame

$$p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n) = 0$$

Korrutis saab olla 0, kui üks teguritest on 0. Et $e^{\lambda x} \neq 0$, siis peab sulgavaldis võrduma nulliga. Võrrandit kujul

$$p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Korrutis saab olla 0, kui üks teguritest on 0. Et $e^{\lambda x} \neq 0$, siis peab sulgavaldis võrduma nulliga. Võrrandit kujul

$$p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Korrutis saab olla 0, kui üks teguritest on 0. Et $e^{\lambda x} \neq 0$, siis peab sulgavaldis võrduma nulliga. Võrrandit kujul

$$p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

Korrutis saab olla 0, kui üks teguritest on 0. Et $e^{\lambda x} \neq 0$, siis peab sulgavaldis võrduma nulliga. Võrrandit kujul

$$p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_n = 0$$

nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks.** Selle võrrandi lahendid λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on **karakteristlikud väärtused.**
Uurime täpsemalt karakteristlikke väärtusi:

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}, \; ...., y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ ....,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}, \; ...., y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

I Karakteristlikud väärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad.

Kui karakteristlikud. väärtused $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on reaalsed ja paarikaupa erinevad (st nende seas ei ole kordseid väärtusi), siis on teada tegelikult võrrandi $Ly = 0$ n lahendit kujul

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}, \; ...., y_n = e^{\lambda_n x}$$

Näitame, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi. Selleks leiame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.
Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Järelikult nii moodustatud funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1: Lahendada $y'' = 2y'$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ja } \lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Näide 2: Lahendada $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Seega $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

II Vaatame juhtu, kus karakteristlikud väärtused kompleksed. Olgu näiteks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleksne karakteristlik väärtus, siis on ka $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ karakteristlikuks väärtuseks, sest reaalsete kordajatega polünoomi kompleksed nullkohad esinevad paarikaupa kaaskompleksarvudena. Siis $Ly = 0$ lahendid $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ on samuti kompleksed. Eraldades nüüd neist reaal- ja imaginaarosa, saame

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ehk siis $u = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $v = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nii määratud u ja v on ka võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 3: Lahendada $y'' = 4y' - 5y$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

Kompleksarv $\lambda = 2 \pm i$, reaalosa on 2, imaginaarosa 1 ning järelikult

$$y_1 = e^{2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Näide 4: Lahendada $y^{(5)} = 6y^{(4)} - 9y^{(3)}$

Siit saame $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ja $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$.

Näide 4: Lahendada $y^{(5)} = 6y^{(4)} - 9y^{(3)}$
Siit saame $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ja $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$.

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused

Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_{n-1} \lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused
Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused

Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ...,\Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused
Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ...,\Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

III Reaalsed kordsed karakteristlikud väärtused
Kui mingi λ on kordne karakteristlik väärtus, näiteks olgu λ_1 $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ y_2 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Tähistame karakteristliku võrrandi lühemalt

$$\Lambda = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

Eelduse kohaselt on λ_1 karakteristliku võrrandi $r-$kordseks nullkohaks, st

$$\Lambda(\lambda_1) = 0,\ \Lambda'(\lambda_1) = 0,\ ..., \Lambda^{(r-1)}(\lambda_1) = 0,\ \Lambda^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$$

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \ \ k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \quad k = 0, 1, ..., r - 1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda)e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0\lambda^n e^{\lambda x} + p_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda)e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Meil vaja näidata, et funktsioonid $y_1, ..., y_r$ rahuldavad võrrandit $Ly = 0$, st

$$L(x^k e^{\lambda_1 x}) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., r-1$$

Iga λ korral kehtib seos

$$L(e^{\lambda x}) = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x} \qquad (*)$$

Tõepoolest

$$L(e^{\lambda x}) = p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_{n-1}\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= p_0 \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = \Lambda(\lambda) e^{\lambda x}$$

Diferentseerime nüüd seose (*) mõlemaid pooli k korda λ järgi.

Vasaku poole diferentseerimisel saame

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}L(e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[p_0\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + ... + p_n e^{\lambda x}\right] =$$

$$= p_0\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) + ... + p_n\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x} =$$

$$= L\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) = L(x^k e^{\lambda x})$$

Vasaku poole diferentseerimisel saame

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} L(e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{\lambda x}\right) + \dots + p_n e^{\lambda x}\right] =$$

$$= p_0 \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x}\right) + \dots + p_n \frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} =$$

$$= L\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x}\right) = L(x^k e^{\lambda x})$$

Vasaku poole diferentseerimisel saame

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} L(e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[p_0 \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{\lambda x} \right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{\lambda x} \right) + \ldots + p_n e^{\lambda x} \right] =$$

$$= p_0 \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} \right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} \right) + \ldots + p_n \frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} =$$

$$= L \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} \right) = L(x^k e^{\lambda x})$$

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

(*) parema poole diferentseerimiseks kasutame Leibnizi valemit

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\Lambda(\lambda)e^{\lambda x}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Seega saame (*) diferentseerimisel, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Lambda^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

Saadud seos peab kehtima iga λ korral. Valime $\lambda = \lambda_1$. Et $\Lambda^{(j)}(\lambda_1) = 0$, siis saame, et

$$L(x^k e^{\lambda x}) = 0.$$

Olemegi näidanud, et funktsioonid $y_1, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.

IV Kui $\lambda = \alpha \pm i\beta$ on $r-$kordne kompleksne karakteristlik väärtus, on ka vastavad lahendid $y_1, ..., , y_{2r}$ kompleksed. Lahendid saame reaal- ja imaginaarosa eraldamisega.

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \; y_2 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, \; ..., y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x, \; y_{r+2} = xe^{\alpha x} \sin \beta x, \; ..., y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

IV Kui $\lambda = \alpha \pm i\beta$ on $r-$kordne kompleksne karakteristlik väärtus, on ka vastavad lahendid $y_1, ..., , y_{2r}$ kompleksed. Lahendid saame reaal- ja imaginaarosa eraldamisega.

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ ..., y_r = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_{r+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{r+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ ..., y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$