Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks.** Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks.** Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks.** Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \qquad (1)$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad (1_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (1_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (1_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \qquad (1)$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad (1_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (1_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (1_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{1}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad (1_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (1_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (1_h) lahend.

Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 = 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{1}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (1_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (1_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (1_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 Ly_1 + C_2 Ly_2 + ... + C_n Ly_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{1}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (1_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (1_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (1_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \qquad (1)$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad (1_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (1_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (1_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{1}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (1_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (1_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (1_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{1}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (1_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (1_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (1_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahendid, y_* on aga (1) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (1) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ *nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus* (a, b), *kui leiduvad kordajad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ *nii, et*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *nimetatakse funktsioone* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *lineaarselt sõltumatuteks.*

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus (a, b), kui leiduvad kordajad $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ nii, et

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, nimetatakse funktsioone $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ lineaarselt sõltumatuteks.

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ *nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus* (a, b), *kui leiduvad kordajad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ *nii, et*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *nimetatakse funktsioone* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *lineaarselt sõltumatuteks.*

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ *nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus* (a, b), *kui leiduvad kordajad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ *nii, et*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *nimetatakse funktsioone* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *lineaarselt sõltumatuteks.*

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1,\;\; y_2 = \sin^2 x,\;\; y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)

Valime $\alpha_1 = -1,\;\; \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.

2) Olgu $y_1 = 1,\; y_2 = x,\; y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks:
1)Vaatame $y_1 = 1, \ \ y_2 = \sin^2 x, \ \ y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1, \ \ \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.
2) Olgu $y_1 = 1, \ y_2 = x, \ y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1,\ \ y_2 = \sin^2 x,\ \ y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1,\ \ \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.
2) Olgu $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1, \; y_2 = \sin^2 x, \; y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1, \; \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.
2) Olgu $y_1 = 1, \; y_2 = x, \; y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (1_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (1_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (1_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (1_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (1_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (1_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Näide: Vaatame jällegi funktsioone $y_1 = 1,\ y_2 = \sin^2 x,\ y_3 = \cos^2 x$.
Moodustame Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 2x = 0.$$

Näide: Vaatame jällegi funktsioone $y_1 = 1,\ y_2 = \sin^2 x,\ y_3 = \cos^2 x$. Moodustame Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 2x = 0.$$

Näide: Vaatame jällegi funktsioone $y_1 = 1,\ y_2 = \sin^2 x,\ y_3 = \cos^2 x$. Moodustame Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 2x = 0.$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ võrrandi (1_h) lahendid. Siis
I *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \equiv 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.*
II *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.*

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* (1_h) *lahendid. Siis*
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.
II $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* (1_h) *lahendid. Siis*
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.
II $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*). Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* (1_h) *lahendid. Siis*
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.
II $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Saadud seost diferentseerides saame

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(k)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(k)}(x)].$$

Kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)] \\ y_1'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1'(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}'(x)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x)] \end{vmatrix} =$$

Saadud seost diferentseerides saame

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(k)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(k)}(x)].$$

Kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_{n-1}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)] \\ y_1'(x) & ... & y_{n-1}'(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1'(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}'(x)] \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x)] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & 0 \\ y_1'(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), \dots, y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b) : \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi $\alpha_i -$de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & 0 \\ y_1'(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b): \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi α_i-de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & 0 \\ y_1'(x) & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b): \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi α_i−de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$
= \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & 0 \\ y_1'(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.
$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b) : \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi $\alpha_i -$de suhtes.

$$
\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}
$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_i on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \ldots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_i on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \dots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_i on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \ldots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (1_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (1_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (1_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (1_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (1_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (1_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b);
2) $W(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;
3) leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) = 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b);
2) $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;
3)leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b);
2) $W(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;
3) leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) = 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b);
2) $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;
3)leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on kas* $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ *korral või* $W(x) \neq 0$ *kõigi* $x \in (a, b)$.

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ on pidevad funktsioonid vahemikus (a, b), siis leidub võrrandi $Ly = 0$ jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ ning lisame erinevaid algtingimusi.

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* (a, b), *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* (a, b), *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* (a, b), *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ on pidevad funktsioonid vahemikus (a, b), siis leidub võrrandi $Ly = 0$ jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks $Ly = 0$ ning lisame erinevaid algtingimusi.

Olgu siis esimene ülesanne

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

kus $x_0 \in (a, b)$. Teine Cauchy ülesanne:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Olgu siis esimene ülesanne

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

kus $x_0 \in (a, b)$. Teine Cauchy ülesanne:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Kuna Wronski determinant on nullist erinev, siis on funktsioonid lineaarselt sõltumatud ja moodustavad LFS.

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0
$$

Kuna Wronski determinant on nullist erinev, siis on funktsioonid lineaarselt sõltumatud ja moodustavad LFS.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteem, siis selle võrrandi üldlahend avaldub kujul* $y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteem,* $y_*(x)$ *võrrandi* $Ly = f(x)$ *üks lahend, siis võrrandi* $Ly = f(x)$ *üldlahend on kujul* $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y_*(x)$.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteem, siis selle võrrandi üldlahend avaldub kujul* $y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteem,* $y_*(x)$ *võrrandi* $Ly = f(x)$ *üks lahend, siis võrrandi* $Ly = f(x)$ *üldlahend on kujul* $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y_*(x)$.

Tõestus

Omaduse 2 põhjal saame öelda, et

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$$

on $Ly = f(x)$ lahend. Nüüd on vaja veel veenduda, et mistahes $x_0 \in (a, b)$ ja mistahes $y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)}$ korral leiduvad konstandid $C_1, C_2, ..., C_n$ nii, et funktsioon $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ rahuldab algtingimusi

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Tõestus

Omaduse 2 põhjal saame öelda, et

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$$

on $Ly = f(x)$ *lahend. Nüüd on vaja veel veenduda, et mistahes* $x_0 \in (a, b)$ *ja mistahes* $y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)}$ *korral leiduvad konstandid* $C_1, C_2, ..., C_n$ *nii, et funktsioon* $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ *rahuldab algtingimusi*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures y_* viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ ... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures y_* viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures y_* viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$.
Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures y_* viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.
KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:
1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.
2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.
3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$.
Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.
KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:
1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.
2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.
3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud. **KOKKUVÕTE:** $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.

Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n-1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$
$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$
$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$
$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] +$$
$$C_1(x)[p_0(x)y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_1] + ... +$$
$$+C_n(x)[p_0(x)y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_n] = f(x)$$

Seega

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] = f(x)$$

Siit

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] +$$
$$C_1(x)[p_0(x)y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_1] + ... +$$
$$+C_n(x)[p_0(x)y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_n] = f(x)$$

Seega

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] = f(x)$$

Siit

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n$.

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$

II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla linaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.

Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi. Uue lahendi y_2 saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$$

II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla linaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.

Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi. Uue lahendi y_2 saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla linaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.
Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi.
Uue lahendi y_2 saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.

Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y' e^x - y e^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y' e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$, $C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$, $C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$,$C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^x dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^x$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x\cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^x dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^x$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^x dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^x$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x}\cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$$