Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Üldkuju

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ on otsitav ja $y', ..., y^{(n)}$ on otsitava funktsiooni tuletised.

Normaalkuju

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

Algtingimused

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{2}$$

Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Üldkuju

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ on otsitav ja $y', ..., y^{(n)}$ on otsitava funktsiooni tuletised.

Normaalkuju

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

Algtingimused

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{2}$$

Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Üldkuju

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ on otsitav ja $y', ..., y^{(n)}$ on otsitava funktsiooni tuletised.
Normaalkuju

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

Algtingimused

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{2}$$

Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Üldkuju

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ on otsitav ja $y', ..., y^{(n)}$ on otsitava funktsiooni tuletised.

Normaalkuju

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

Algtingimused

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{2}$$

Kõrgemat järku DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}) \equiv 0 \quad \forall x.$$

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev muutujate $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} vähemalt üks lahend.

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide $y, y', ..., y^{(n-1)}$ järgi, mis on ka pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} parajasti üks lahend.

Kõrgemat järku DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}) \equiv 0 \quad \forall x.$$

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev muutujate $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} vähemalt üks lahend.

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide $y, y', ..., y^{(n-1)}$ järgi, mis on ka pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} parajasti üks lahend.

Kõrgemat järku DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}) \equiv 0 \quad \forall x.$$

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev muutujate $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ *piirkonnas D. Siis iga punkti* $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ *korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} vähemalt üks lahend.*

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide y, y', ..., $y^{(n-1)}$ *järgi, mis on ka pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti* $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ *korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} parajasti üks lahend.*

Definitsioon

Võrrandi (1) üldlahendiks nimetatakse võrrandi (1) lahendite peresid $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, *mis sõltuvad n suvalisest konstandist* $C_1, ..., C_n$ *ja mille puhul iga punkti* $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) =\in D$ *jaoks leiduvad konstantide väärtused* $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, *nii et lahend* $y = y(x, C_1^0, ..., C_n^0)$ *rahuldab algtingimusi (2).*

Definitsioon

Võrrandi (1) erilahend on võrrandi (1) lahend, mis on saadud konstantide fikseerimisega.

Definitsioon

Võrrandi (1) üldlahendiks nimetatakse võrrandi (1) lahendite peresid $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, *mis sõltuvad n suvalisest konstandist* $C_1, ..., C_n$ *ja mille puhul iga punkti* $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) =\in D$ *jaoks leiduvad konstantide väärtused* $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, *nii et lahend* $y = y(x, C_1^0, ..., C_n^0)$ *rahuldab algtingimusi (2).*

Definitsioon

Võrrandi (1) erilahend on võrrandi (1) lahend, mis on saadud konstantide fikseerimisega.

Lihtsamate $n-$järku dif. võrrandite lahendamine

- Vaatame võrrandit kujul

$$y^{(n)} = f(x).$$

Olgu lisaks antud algtingimused (2), siis Cauchy ülesande lahendi saab esitada kujul

$$y = y_0 + y_0^1(x - x_0) + \frac{y_0^2}{2!}(x - x_0)^2 + ... +$$

$$\frac{y_0^{n-1}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - s)^{n-1} f(s)ds.$$

Lihtsamate $n-$järku dif. võrrandite lahendamine

- Vaatame võrrandit kujul

$$y^{(n)} = f(x).$$

Olgu lisaks antud algtingimused (2), siis Cauchy ülesande lahendi saab esitada kujul

$$y = y_0 + y_0^1(x - x_0) + \frac{y_0^2}{2!}(x - x_0)^2 + ... +$$

$$\frac{y_0^{n-1}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - s)^{n-1} f(s)ds.$$

II Võrrand on kujul

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Võrrandi üldlahend isaab esitada parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \Phi(p, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

III Olgu võrrand kujul

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Kasutame uut otsitavat funktsiooni

$$z = y^{(k)}.$$

II Võrrand on kujul

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Võrrandi üldlahend isaab esitada parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \Phi(p, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

III Olgu võrrand kujul

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Kasutame uut otsitavat funktsiooni

$$z = y^{(k)}.$$

II Võrrand on kujul

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Võrrandi üldlahend isaab esitada parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \Phi(p, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

III Olgu võrrand kujul

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Kasutame uut otsitavat funktsiooni

$$z = y^{(k)}.$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z = \left(z''z + (z')^2\right)z$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z = \left(z''z + (z')^2\right) z$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z = \left(z'' z + (z')^2\right) z$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z = \left(z''z + (z')^2\right)z$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z = \left(z''z + (z')^2\right)z$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z = \left(z''z + (z')^2\right)z$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z = \left(z''z + (z')^2\right)z$$

Selliste asendustega on võimalik esialgne võrrand viia kujule

$$G(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Lahendiks

$$z = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Arvestades nüüd tehtud muutujavahetust, saame

$$y' = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Siit

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, ..., C_n)} = x + C_n.$$

Selliste asendustega on võimalik esialgne võrrand viia kujule

$$G(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Lahendiks

$$z = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Arvestades nüüd tehtud muutujavahetust, saame

$$y' = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Siit

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, ..., C_n)} = x + C_n.$$

Selliste asendustega on võimalik esialgne võrrand viia kujule

$$G(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Lahendiks

$$z = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Arvestades nüüd tehtud muutujavahetust, saame

$$y' = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Siit

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, ..., C_n)} = x + C_n.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.

Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon y, y', ..., $y^{(n)}$ suhtes. See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots, y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \ldots,y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha}F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogiliiliselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots,\ y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogilililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots,y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha}F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon y, y', ... , $y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogilililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

Kuna tegu on homogeense võrrandiga, siis $\forall y > 0$ korral võime seose kirjutada kujule

$$y^{\alpha} F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

ning $\forall y < 0$ korral

$$y^{\alpha} F(x, -1, -z, -(z^2 + z'), ..., -\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis tuleb ka $y = 0$ arvesse esialgse võrrandi lahendina. Üldiselt saame kaks lahendit

$$z = \varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

$$z = \varphi_-(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

ning siit saame tagasiasendusega eralduvate muutujatega DV'd

$$y' = y\varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

või

$$y' = y\varphi_-(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}).$$

Kuna tegu on homogeense võrrandiga, siis $\forall y > 0$ korral võime seose kirjutada kujule

$$y^{\alpha} F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

ning $\forall y < 0$ korral

$$y^{\alpha} F(x, -1, -z, -(z^2 + z'), ..., -\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis tuleb ka $y = 0$ arvesse esialgse võrrandi lahendina. Üldiselt saame kaks lahendit

$$z = \varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

$$z = \varphi_-(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

ning siit saame tagasiasendusega eralduvate muutujatega DV'd

$$y' = y\varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

või

$$y' = y\varphi_-(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}).$$

Kuna tegu on homogeense võrrandiga, siis $\forall y > 0$ korral võime seose kirjutada kujule

$$y^\alpha F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

ning $\forall y < 0$ korral

$$y^\alpha F(x, -1, -z, -(z^2 + z'), ..., -\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis tuleb ka $y = 0$ arvesse esialgse võrrandi lahendina. Üldiselt saame kaks lahendit

$$z = \varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

$$z = \varphi_-(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

ning siit saame tagasiasendusega eralduvate muutujatega DV'd

$$y' = y\varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

või

$$y' = y\varphi_-(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}).$$

Kuna tegu on homogeense võrrandiga, siis $\forall y > 0$ korral võime seose kirjutada kujule

$$y^{\alpha} F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

ning $\forall y < 0$ korral

$$y^{\alpha} F(x, -1, -z, -(z^2 + z'), ..., -\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis tuleb ka $y = 0$ arvesse esialgse võrrandi lahendina. Üldiselt saame kaks lahendit

$$z = \varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

$$z = \varphi_-(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

ning siit saame tagasiasendusega eralduvate muutujatega DV'd

$$y' = y\varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

või

$$y' = y\varphi_-(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}).$$

Lahendiks vastavalt siis

$$y = C_n e^{\int \varphi_+(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) dx} \quad C_n > 0$$

ja

$$y = C_n e^{\int \varphi_-(x, C_1, \dots, C_{n-1}) dx} \quad C_n < 0.$$

Kõrgemat järku lineaarsed DV

Võrrandit

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse lineaarseks $n-$järku HDVks, kui ta on lineaarne otsitava ja tema tuletiste suhtes ehk ta on kirjutatav kujul

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \tag{3}$$

Eeldame, et $p_0(x) \neq 0$, siis

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + ... + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

Kõrgemat järku lineaarsed DV

Võrrandit

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse lineaarseks $n-$järku HDVks, kui ta on lineaarne otsitava ja tema tuletiste suhtes ehk ta on kirjutatav kujul

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \quad (3)$$

Eeldame, et $p_0(x) \neq 0$, siis

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + ... + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

Kõrgemat järku lineaarsed DV

Võrrandit

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse lineaarseks $n-$järku HDVks, kui ta on lineaarne otsitava ja tema tuletiste suhtes ehk ta on kirjutatav kujul

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \tag{3}$$

Eeldame, et $p_0(x) \neq 0$, siis

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + ... + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

Moodustame Cauchy ülesande, selleks lisame lineaarsele võrrandile n algtingimust:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \end{cases} \tag{4}$$

kus $x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}$ on konstandid.

Teoreem

Kui võrrandi (3) kordajad $p_0(x),\ p_1(x), ..., p_n(x)$ *ja vabaliige* $f(x)$ *on pidevad vahemikus* (a, b) *ja* $x_0 \in (a, b),\ y_0,\ y_0^1, ..., y_0^{n-1} \in (-\infty, \infty)$, *siis võrrandil (3) leidub parajasti üks lahend* $y = y(x)$, *mis rahuldab tingimusi (4).*

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (3) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (3')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)} \left[f(x) - p_1(x) y^{(n-1)} - ... - p_n(x) y \right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ on pidev muutujate piirkonnas D.
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (3) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (3')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)}\left[f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_n(x)y\right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *on pidev muutujate piirkonnas D.*
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (3) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (3')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)}\left[f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_n(x)y\right]$$

Meil vaja näidata, et

1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *on pidev muutujate piirkonnas D.*

2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$

3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.

Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (3) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (3')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)}\left[f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_n(x)y\right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *on pidev muutujate piirkonnas D.*
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}, ..., \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (3) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (3')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)}\left[f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_n(x)y\right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *on pidev muutujate piirkonnas D.*
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}, ..., \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Olgu meil piirkond

$$D = \left\{ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) : a < x < b;\ -\infty < \ y, y', ..., y^{(n-1)} < \infty \right\}.$$

Kontrollime tingimusi:

1) kui $p_0(x) \neq 0$, siis on (3') pidev piirkonnas D,

2) $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{p_n(x)}{p_0(x)}$

$\frac{\partial g}{\partial y'} = -\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}$

...

$\frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$

3) on automaatselt täidetud teoreemi põhjal.

Olgu meil piirkond

$$D = \left\{ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) : a < x < b;\ -\infty < \ y, y', ..., y^{(n-1)} < \infty \right\}.$$

Kontrollime tingimusi:

1) kui $p_0(x) \neq 0$, siis on (3') pidev piirkonnas D,

2) $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{p_n(x)}{p_0(x)}$

$\frac{\partial g}{\partial y'} = -\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}$

...

$\frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$

3) on automaatselt täidetud teoreemi põhjal.

Olgu meil piirkond

$$D = \left\{ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) : a < x < b;\ -\infty < \ y, y', ..., y^{(n-1)} < \infty \right\}.$$

Kontrollime tingimusi:
1) kui $p_0(x) \neq 0$, siis on (3') pidev piirkonnas D,
2) $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{p_n(x)}{p_0(x)}$
$\frac{\partial g}{\partial y'} = -\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}$
...
$\frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$
3) on automaatselt täidetud teoreemi põhjal.

Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks**. Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks.** Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks.** Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{5}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad (5_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (5_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (5_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 Ly_1 + C_2 Ly_2 + ... + C_n Ly_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{5}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (5_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (5_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (5_h) lahend.

Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{5}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (5_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (5_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (5_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{5}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (5_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (5_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (5_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \; Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{5}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad (5_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (5_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (5_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{5}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad (5_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (5_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (5_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 Ly_1 + C_2 Ly_2 + ... + C_n Ly_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \tag{5}$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \qquad\qquad (5_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (5_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

võrrandi (5_h) lahend.
Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, ..., \ Ly_n \equiv 0$, siis $L(C_1 y_1 + ... + C_n y_n) \equiv 0$.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) =$$

$$= C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + ... + C_n L y_n = C_1 \cdot 0 + ... + C_n \cdot 0 \equiv 0.$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (5_h) lahendid, y_* on aga (5) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ on (5) lahend.
Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (5_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (5_h) lahenditeks.
Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ *nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus* (a, b), *kui leiduvad kordajad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ *nii, et*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *nimetatakse funktsioone* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *lineaarselt sõltumatuteks.*

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ *nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus* (a, b), *kui leiduvad kordajad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ *nii, et*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *nimetatakse funktsioone* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *lineaarselt sõltumatuteks.*

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ *nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus* (a, b), *kui leiduvad kordajad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ *nii, et*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *nimetatakse funktsioone* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *lineaarselt sõltumatuteks.*

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \quad x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ *nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus* (a, b)*, kui leiduvad kordajad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0)$ *nii, et*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$*, nimetatakse funktsioone* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *lineaarselt sõltumatuteks.*

Näiteks:
1)Vaatame $y_1 = 1, \; y_2 = \sin^2 x, \; y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1, \; \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.
2) Olgu $y_1 = 1, \; y_2 = x, \; y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1, \; y_2 = \sin^2 x, \; y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1, \; \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.

2) Olgu $y_1 = 1, \; y_2 = x, \; y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1,\ \ y_2 = \sin^2 x,\ \ y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1,\ \ \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.
2) Olgu $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks:

1)Vaatame $y_1 = 1, \;\; y_2 = \sin^2 x, \;\; y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)
Valime $\alpha_1 = -1, \;\; \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.
2) Olgu $y_1 = 1, \; y_2 = x, \; y_3 = x^2, ..., y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (5_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (5_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ (5_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b). Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Näide: Vaatame jällegi funktsioone $y_1 = 1,\ y_2 = \sin^2 x,\ y_3 = \cos^2 x$.
Moodustame Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 2x = 0.$$

Näide: Vaatame jällegi funktsioone $y_1 = 1,\ y_2 = \sin^2 x,\ y_3 = \cos^2 x$. Moodustame Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 2x = 0.$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ võrrandi (5_h) lahendid. Siis
I *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \equiv 0 \ \forall x \in (a, b)$.*
II *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$.*

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* (5_h) *lahendid. Siis*
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.
II $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* (5_h) *lahendid. Siis*
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.
II $y_1(x), ..., y_n(x)$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b) *parajasti siis, kui* $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*). Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ võrrandi (5_h) lahendid. Siis
I *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.*
II *$y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.*

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*).Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Saadud seost diferentseerides saame

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(k)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(k)}(x)].$$

Kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)] \\ y_1'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1'(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}'(x)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x)] \end{vmatrix} =$$

Saadud seost diferentseerides saame

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(k)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(k)}(x)].$$

Kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_{n-1}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)] \\ y_1'(x) & ... & y_{n-1}'(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1'(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}'(x)] \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{1}{\alpha_n}[-\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) - ... - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x)] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & 0 \\ y_1'(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud.Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b): \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi α_i-de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & 0 \\ y_1'(x) & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b) : \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi $\alpha_i -$de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$
= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & 0 \\ y_1'(x) & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & 0 \end{vmatrix} = 0.
$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud.Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b) : \quad W(x_0) = 0.$
Saame välja kirjutada algebralise süsteemi α_i-de suhtes.

$$
\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}
$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & 0 \\ y_1'(x) & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud.Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b): \quad W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebralise süsteemi α_i-de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_i on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \dots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_i on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \ldots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeensel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_i on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha_1}, \dots, \alpha_n = \widetilde{\alpha_n}.$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (5_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (5_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (5_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Moodustame funktsiooni

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on $\widetilde{y}$ võrrandi (5_h) lahend.

$$\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1'(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \widetilde{\alpha_1} y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\widetilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\widetilde{y}(x_0) = 0$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = 0$$

$$...$$

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$.Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$.Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

ning saame, et $\widetilde{y}(x) \equiv 0$.Seega

$$\widetilde{\alpha_1} y_1(x) + ... + \widetilde{\alpha_n} y_n(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\widetilde{\alpha_1}^2 + ... + \widetilde{\alpha_n}^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), ..., y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b). Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n-1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (5_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b);
2) $W(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;
3) leidub $x_0 \in (a, b)$*, mille korral* $W(x_0) = 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (5_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b);
2) $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;
3)leidub $x_0 \in (a, b)$*, mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (5_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltuvad vahemikus* (a, b);
2) $W(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;
3) leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) = 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (5_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ *on lineaarselt sõltumatud vahemikus* (a, b);
2) $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;
3)leidub $x_0 \in (a, b)$, *mille korral* $W(x_0) \neq 0$.

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (5_h) *lahendite* $y_1, y_2, ..., y_n$ *korral on kas* $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ *korral või* $W(x) \neq 0$ *kõigi* $x \in (a, b)$.