Integreeruvustegur

Vaatleme võrrandit

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme võrrandit

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme võrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme võrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0, \tag{1}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{2}$$

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{2}$$

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0, \qquad (1)$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \qquad (2)$$

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{2}$$

- Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (2) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (2) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (2) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (2) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (2) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (2) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$. Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y, \ \omega = xy, \ \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (2), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (2), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y,\ \ \omega = xy,\ \ \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (2), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y, \;\; \omega = xy, \;\; \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (2), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)} d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y, \ \ \omega = xy, \ \ \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (2), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.

Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.

Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.
Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siis avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siis avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:

1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.

Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siis avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siis avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siis avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.

Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siis avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siis avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siis avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y.

Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y. Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y. Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y. Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y. Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y. Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

ning alumise seose põhjal

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp.$$

Kahe seose põhjal saame

$$p dx = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp$$

ehk

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - p \right) dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp = 0.$$

ning alumise seose põhjal

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp.$$

Kahe seose põhjal saame

$$pdx = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp$$

ehk

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - p \right) dx + \frac{\partial g}{\partial p} dp = 0.$$

ning alumise seose põhjal

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp.$$

Kahe seose põhjal saame

$$pdx = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp$$

ehk

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - p\right) dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp = 0.$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

ning

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp = 0.$$

Võrrandi üldlahend

$$x = h(y, \xi(y, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = h(\xi(p, C), p) \\ y = \xi(p, C). \end{cases}$$

ning

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp = 0.$$

Võrrandi üldlahend

$$x = h(y, \xi(y, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = h(\xi(p, C), p) \\ y = \xi(p, C). \end{cases}$$

ning

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp = 0.$$

Võrrandi üldlahend

$$x = h(y, \xi(y, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = h(\xi(p, C), p) \\ y = \xi(p, C). \end{cases}$$

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v),\ \ \psi(u, v),\ \ \chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v), \ \psi(u, v), \ \chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u,v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \chi(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u,v)du + N(u,v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u,v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u,v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u,v)du + N(u,v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right),$$

millest

$$\left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) du + \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right),$$

millest

$$\left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du + \left(\chi\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Lahend on kujul $u = \tau(v, C)$ või $v = \omega(u, C)$. Lõppvastuseks seega saame

$$\begin{cases} x = \varphi\left(\tau(v, C), v\right) \\ y = \psi\left(\tau(v, C), v\right) \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, \omega(u, C)\right) \\ y = \psi\left(u, \omega(u, C)\right). \end{cases}$$

Sellist üleminekut esialgselt võrrandilt nimetatakse parametriseerimiseks kahe parameetri abil.

Lahend on kujul $u = \tau(v, C)$ või $v = \omega(u, C)$. Lõppvastuseks seega saame

$$\begin{cases} x = \varphi\left(\tau(v, C), v\right) \\ y = \psi\left(\tau(v, C), v\right) \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, \omega(u, C)\right) \\ y = \psi\left(u, \omega(u, C)\right). \end{cases}$$

Sellist üleminekut esialgselt võrrandilt nimetatakse parametriseerimiseks kahe parameetri abil.

Lahend on kujul $u = \tau(v, C)$ või $v = \omega(u, C)$. Lõppvastuseks seega saame

$$\begin{cases} x = \varphi\left(\tau(v, C), v\right) \\ y = \psi\left(\tau(v, C), v\right) \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, \omega(u, C)\right) \\ y = \psi\left(u, \omega(u, C)\right). \end{cases}$$

Sellist üleminekut esialgselt võrrandilt nimetatakse parametriseerimiseks kahe parameetri abil.

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$

Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = vdx, \quad dy = v^2 du + 2v(u+1)dv$$

$$v^2 du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = vdx, \quad dy = v^2du + 2v(u+1)dv$$

$$v^2du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = vdx, \quad dy = v^2du + 2v(u+1)dv$$

$$v^2du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = vdx, \quad dy = v^2du + 2v(u+1)dv$$

$$v^2du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = vdx, \quad dy = v^2du + 2v(u+1)dv$$

$$v^2du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = vdx, \quad dy = v^2du + 2v(u+1)dv$$

$$v^2du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$. Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral. Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$.

Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral.

Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$. Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral.

Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$. Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral. Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$.
Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral.
Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$.
Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral.
Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

Parameetrite ellimineerimisel saame

$$y = 0, \;\; y = x + 1, \;\; y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$$

Kui $C = 0$, siis on üldlahendi seosega antud ka $y = x + 1$. Seega on lahendiks $y = 0$ ja $y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$.

Parameetrite ellimineerimisel saame

$$y = 0, \;\; y = x + 1, \;\; y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$$

Kui $C = 0$, siis on üldlahendi seosega antud ka $y = x + 1$. Seega on lahendiks $y = 0$ ja $y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$.

Parameetrite ellimineerimisel saame

$$y = 0, \quad y = x + 1, \quad y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$$

Kui $C = 0$, siis on üldlahendi seosega antud ka $y = x + 1$. Seega on lahendiks $y = 0$ ja $y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$.

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand. Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand. Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand. Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand. Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand. Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand. Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand. Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\,dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Kui $\varphi(v) \neq v$, on Lagrange'i võrrandi üldlahend kujul

$$\begin{cases} x = u(v, C) \\ y = u(v, C)\varphi(v) + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) = v$, siis on võrrand kujul

$$y = xy' + \psi(y').$$

Sellist võrrandit nimetatakse **Clairaut' võrrandiks**. Ka Clairaut' võrrandi lahendamiseks kasutatakse parametriseerimist

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) \neq v$, on Lagrange'i võrrandi üldlahend kujul

$$\begin{cases} x = u(v, C) \\ y = u(v, C)\varphi(v) + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) = v$, siis on võrrand kujul

$$y = xy' + \psi(y').$$

Sellist võrrandit nimetatakse **Clairaut' võrrandiks**. Ka Clairaut' võrrandi lahendamiseks kasutatakse parametriseerimist

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) \neq v$, on Lagrange'i võrrandi üldlahend kujul

$$\begin{cases} x = u(v, C) \\ y = u(v, C)\varphi(v) + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) = v$, siis on võrrand kujul

$$y = xy' + \psi(y').$$

Sellist võrrandit nimetatakse **Clairaut' võrrandiks.** Ka Clairaut' võrrandi lahendamiseks kasutatakse parametriseerimist

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) \neq v$, on Lagrange'i võrrandi üldlahend kujul

$$\begin{cases} x = u(v, C) \\ y = u(v, C)\varphi(v) + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) = v$, siis on võrrand kujul

$$y = xy' + \psi(y').$$

Sellist võrrandit nimetatakse **Clairaut' võrrandiks.** Ka Clairaut' võrrandi lahendamiseks kasutatakse parametriseerimist

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv + \psi(v) \end{cases}$$

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\,dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] dv = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.

Lahendi siledus

Vaatleme võrrandit $y' = f(x, y)$. Definitsiooni kohaselt on võrrandi lahendid pidevalt diferentseeruvad.

Teoreem

Olgu funktsioon $f(x, y)$ k korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas D. Siis diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ iga lahend on $k + 1$ korda pidevalt diferentseeruv.

Lahendi siledus

Vaatleme võrrandit $y' = f(x, y)$. Definitsiooni kohaselt on võrrandi lahendid pidevalt diferentseeruvad.

Teoreem

Olgu funktsioon $f(x, y)$ k korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas D. Siis diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ iga lahend on $k + 1$ korda pidevalt diferentseeruv.

Lahendi siledus

Vaatleme võrrandit $y' = f(x, y)$. Definitsiooni kohaselt on võrrandi lahendid pidevalt diferentseeruvad.

Teoreem

Olgu funktsioon $f(x, y)$ k korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas D. Siis diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ iga lahend on $k + 1$ korda pidevalt diferentseeruv.

Tõestus

Olgu $y = y(x)$ meie võrrandi lahendiks, siis kehtib samasus:

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Et $y(x)$ ja $f(x, y)$ on pidevalt diferentseeruvad, siis on seda ka $f(x, y(x))$ ehk $y'(x)$. Seega on $y(x)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv ning et ka $f(x, y)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis saab sama öelda ka $f(x, y(x)) \equiv y'(x)$ kohta. Sellega on $y(x)$ kolm korda diferentseeruv. Jätkates samamoodi, jõuame teoreemi väiteni.

Tõestus

Olgu $y = y(x)$ meie võrrandi lahendiks, siis kehtib samasus:

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Et $y(x)$ ja $f(x, y)$ on pidevalt diferentseeruvad, siis on seda ka $f(x, y(x))$ ehk $y'(x)$. Seega on $y(x)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv ning et ka $f(x, y)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis saab sama öelda ka $f(x, y(x)) \equiv y'(x)$ kohta. Sellega on $y(x)$ kolm korda diferentseeruv. Jätkates samamoodi, jõuame teoreemi väiteni.

Tõestus

Olgu $y = y(x)$ *meie võrrandi lahendiks, siis kehtib samasus:*

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Et $y(x)$ *ja* $f(x, y)$ *on pidevalt diferentseeruvad, siis on seda ka* $f(x, y(x))$ *ehk* $y'(x)$. *Seega on* $y(x)$ *kaks korda pidevalt diferentseeruv ning et ka* $f(x, y)$ *on kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis saab sama öelda ka* $f(x, y(x)) \equiv y'(x)$ *kohta. Sellega on* $y(x)$ *kolm korda diferentseeruv. Jätkates samamoodi, jõuame teoreemi väiteni.*

Cauchy ülesande lahendamine astmeridadade abil

Olgu meil antud Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Otsime Cauchy ülesande lahendit astmereana

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k,$$

kus kordajad avalduvad kujul

$$C_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Algtingimus on rahuldatud, kui $C_0 = y_0$. Nüüd saame võrrandist, et

$$C_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Cauchy ülesande lahendamine astmeridadade abil

Olgu meil antud Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Otsime Cauchy ülesande lahendit astmereana

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k,$$

kus kordajad avalduvad kujul

$$C_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Algtingimus on rahuldatud, kui $C_0 = y_0$. Nüüd saame võrrandist, et

$$C_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Cauchy ülesande lahendamine astmeridadade abil

Olgu meil antud Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Otsime Cauchy ülesande lahendit astmereana

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k,$$

kus kordajad avalduvad kujul

$$C_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Algtingimus on rahuldatud, kui $C_0 = y_0$. Nüüd saame võrrandist, et

$$C_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Diferentseerides saame

$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y',$$

seega

$$C_2 = \frac{1}{2}y''(x_0) = \frac{1}{2}[f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)].$$

Võrrandit edasi diferentseerides on võimalik leida ülejäänud kordajad C_k. Et iga järgmise kordaja leidmine on järgmisest keerulisem, siis piirdutakse tavaliselt lähislahendiga, mille annavad enamasti reaksarenduse esimesed liikmed.

Diferentseerides saame

$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y',$$

seega

$$C_2 = \frac{1}{2}y''(x_0) = \frac{1}{2}[f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)].$$

Võrrandit edasi diferentseerides on võimalik leida ülejäänud kordajad C_k. Et iga järgmise kordaja leidmine on järgmisest keerulisem, siis piirdutakse tavaliselt lähislahendiga, mille annavad enamasti reaksarenduse esimesed liikmed.

Diferentseerides saame

$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y',$$

seega

$$C_2 = \frac{1}{2}y''(x_0) = \frac{1}{2}[f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)].$$

Võrrandit edasi diferentseerides on võimalik leida ülejäänud kordajad C_k. Et iga järgmise kordaja leidmine on järgmisest keerulisem, siis piirdutakse tavaliselt lähislahendiga, mille annavad enamasti reaksarenduse esimesed liikmed.

Näide: Lahendada Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = x^2 + y^2,$$

leiame tuletised

$$y'' = 2x + 2yy'$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$$

jne. Teame, et $y(0) = 0$, arvutame nüüd $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$. Seega saame ülesande lähislahendiks võtta

$$y = \frac{2}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Näide: Lahendada Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = x^2 + y^2,$$

leiame tuletised

$$y'' = 2x + 2yy'$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$$

jne. Teame, et $y(0) = 0$, arvutame nüüd $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$. Seega saame ülesande lähislahendiks võtta

$$y = \frac{2}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Näide: Lahendada Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = x^2 + y^2,$$

leiame tuletised

$$y'' = 2x + 2yy'$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$$

jne. Teame, et $y(0) = 0$, arvutame nüüd $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$. Seega saame ülesande lähislahendiks võtta

$$y = \frac{2}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Näide: Lahendada Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = x^2 + y^2,$$

leiame tuletised

$$y'' = 2x + 2yy'$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$$

jne. Teame, et $y(0) = 0$, arvutame nüüd $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$. Seega saame ülesande lähislahendiks võtta

$$y = \frac{2}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Näide: Lahendada Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = x^2 + y^2,$$

leiame tuletised

$$y'' = 2x + 2yy'$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$$

jne. Teame, et $y(0) = 0$, arvutame nüüd $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$. Seega saame ülesande lähislahendiks võtta

$$y = \frac{2}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Näide: Lahendada Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = x^2 + y^2,$$

leiame tuletised

$$y'' = 2x + 2yy'$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$$

jne. Teame, et $y(0) = 0$, arvutame nüüd $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$. Seega saame ülesande lähislahendiks võtta

$$y = \frac{2}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja y_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathrm{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ ja otsitakse ülesande lahendi y lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve $y_1, y_2, y_3, \ldots$ nii, et $y_i \approx y(x_i)$.

Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja y_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathrm{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ ja otsitakse ülesande lahendi y lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve $y_1, y_2, y_3, \ldots$ nii, et $y_i \approx y(x_i)$.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.

Euleri meetod

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h^2)$.
Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h^2)$.
Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h^2)$.
Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h^2)$.
Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h^2)$.
Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h^2)$.
Trapetsvalemi meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Üldkuju

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ on otsitav ja $y', ..., y^{(n)}$ on otsitava funktsiooni tuletised.

Normaalkuju

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{3}$$

Algtingimused

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Üldkuju

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ on otsitav ja $y', ..., y^{(n)}$ on otsitava funktsiooni tuletised.
Normaalkuju

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{3}$$

Algtingimused

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Üldkuju

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ on otsitav ja $y', ..., y^{(n)}$ on otsitava funktsiooni tuletised.
Normaalkuju

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{3}$$

Algtingimused

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

Kõrgemat järku DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}) \equiv 0 \quad \forall x.$$

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev muutujate $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} vähemalt üks lahend.

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide y, y', ..., $y^{(n-1)}$ järgi, mis on ka pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} parajasti üks lahend.

Kõrgemat järku DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}) \equiv 0 \quad \forall x.$$

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev muutujate $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} vähemalt üks lahend.

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide $y, y', ..., y^{(n-1)}$ järgi, mis on ka pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} parajasti üks lahend.

Kõrgemat järku DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}) \equiv 0 \quad \forall x.$$

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev muutujate $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} vähemalt üks lahend.

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide y, y', ..., $y^{(n-1)}$ järgi, mis on ka pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} parajasti üks lahend.

Definitsioon

Võrrandi (1) üldlahendiks nimetatakse võrrandi (1) lahendite peresid $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, *mis sõltuvad n suvalisest konstandist* $C_1, ..., C_n$ *ja mille puhul iga punkti* $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1} =\in D$ *jaoks leiduvad konstantide väärtused* $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, *nii et lahend* $y = y(x, C_1^0, ..., C_n^0)$ *rahuldab algtingimusi (2).*

Definitsioon

Võrrandi (1) erilahend on võrrandi (1) lahend, mis on saadud konstantide fikseerimisega.

Definitsioon

Võrrandi (1) üldlahendiks nimetatakse võrrandi (1) lahendite peresid $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, *mis sõltuvad n suvalisest konstandist* $C_1, ..., C_n$ *ja mille puhul iga punkti* $(x_0, y_0, ..., y_0^{n-1} = \in D$ *jaoks leiduvad konstantide väärtused* $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, *nii et lahend* $y = y(x, C_1^0, ..., C_n^0)$ *rahuldab algtingimusi (2).*

Definitsioon

Võrrandi (1) erilahend on võrrandi (1) lahend, mis on saadud konstantide fikseerimisega.

Lihtsamate $n-$järku dif. võrrandite lahendamine

- Vaatame võrrandit kujul

$$y^{(n)} = f(x).$$

Olgu lisaks antud algtingimused (2), siis Cauchy ülesande lahendi saab esitada kujul

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - s)^{n-1} f(s)ds.$$

Lihtsamate $n-$järku dif. võrrandite lahendamine

- Vaatame võrrandit kujul

$$y^{(n)} = f(x).$$

Olgu lisaks antud algtingimused (2), siis Cauchy ülesande lahendi saab esitada kujul

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y''}{2!}(x - x_0)^2 + ... +$$

$$\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - s)^{n-1} f(s)ds.$$

II Võrrand on kujul

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Võrrandi üldlahendisaab esitada parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \Phi(p, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

III Olgu võrrand kujul

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Kasutame uut otsitavat funktsiooni

$$z = y^{(k)}.$$

II Võrrand on kujul

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Võrrandi üldlahendisaab esitada parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \Phi(p, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

III Olgu võrrand kujul

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Kasutame uut otsitavat funktsiooni

$$z = y^{(k)}.$$

II Võrrand on kujul

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Võrrandi üldlahendisaab esitada parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \Phi(p, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

III Olgu võrrand kujul

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Kasutame uut otsitavat funktsiooni

$$z = y^{(k)}.$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z = \left(z''z + (z')^2\right)z$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z = \left(z''z + (z')^2\right) z$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z = \left(z''z + (z')^2\right) z$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z = \left(z''z + (z')^2\right)z$$

Selliste asendustega on võimalik esialgne võrrand viia kujule

$$G(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Lahendiks

$$z = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Arvestades nüüd tehtud muutujavahetust, saame

$$y' = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Siit

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, ..., C_n)} = x + C_n.$$

Selliste asendustega on võimalik esialgne võrrand viia kujule

$$G(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Lahendiks

$$z = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Arvestades nüüd tehtud muutujavahetust, saame

$$y' = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Siit

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, ..., C_n)} = x + C_n.$$

Selliste asendustega on võimalik esialgne võrrand viia kujule

$$G(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Lahendiks

$$z = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Arvestades nüüd tehtud muutujavahetust, saame

$$y' = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Siit

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, ..., C_n)} = x + C_n.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.

Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon y, y', ..., $y^{(n)}$ suhtes. See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogilililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon y, y', ... , $y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha}F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots,y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots,\ y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots, y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogiliiliselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots,y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha}F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogiliiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots, y^{(n)}$ suhtes.
See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0.$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

Kuna tegu on homogeense võrrandiga, siis $\forall y > 0$ korral võime seose kirjutada kujule

$$y^\alpha F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

ning $\forall y < 0$ korral

$$y^\alpha F(x, -1, -z, -(z^2 + z'), ..., -\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis tuleb ka $y = 0$ arvesse esialgse võrrandi lahendina. Üldiselt saame kaks lahendit

$$z = \varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

$$z = \varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1})$$

ning siit saame tagasiasendusega eralduvate muutujatega DV'd

$$y' = y\varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

või

$$y' = y\varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Kuna tegu on homogeense võrrandiga, siis $\forall y > 0$ korral võime seose kirjutada kujule

$$y^{\alpha} F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

ning $\forall y < 0$ korral

$$y^{\alpha} F(x, -1, -z, -(z^2 + z'), ..., -\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis tuleb ka $y = 0$ arvesse esialgse võrrandi lahendina. Üldiselt saame kaks lahendit

$$z = \varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

$$z = \varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1})$$

ning siit saame tagasiasendusega eralduvate muutujatega DV'd

$$y' = y\varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

või

$$y' = y\varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Kuna tegu on homogeense võrrandiga, siis $\forall y > 0$ korral võime seose kirjutada kujule

$$y^{\alpha} F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

ning $\forall y < 0$ korral

$$y^{\alpha} F(x, -1, -z, -(z^2 + z'), ..., -\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis tuleb ka $y = 0$ arvesse esialgse võrrandi lahendina. Üldiselt saame kaks lahendit

$$z = \varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

$$z = \varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1})$$

ning siit saame tagasiasendusega eralduvate muutujatega DV'd

$$y' = y\varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

või

$$y' = y\varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Kuna tegu on homogeense võrrandiga, siis $\forall y > 0$ korral võime seose kirjutada kujule

$$y^{\alpha} F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

ning $\forall y < 0$ korral

$$y^{\alpha} F(x, -1, -z, -(z^2 + z'), ..., -\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis tuleb ka $y = 0$ arvesse esialgse võrrandi lahendina. Üldiselt saame kaks lahendit

$$z = \varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

$$z = \varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1})$$

ning siit saame tagasiasendusega eralduvate muutujatega DV'd

$$y' = y\varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

või

$$y' = y\varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Lahendiks vastavalt siis

$$y = C_n e^{\int \varphi_+(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx} \quad C_n > 0$$

ja

$$y = C_n e^{\int \varphi_-(x, C_1, \ldots, C_{n-1})dx} \quad C_n < 0.$$