Lineaarne DV

Vaatame lineaarset võrrandit kujul

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Lisame algtingimuse

$$y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

ning moodustame Cauchy ülesande {(1),(2)}.

Lause

Olgu $p(x)$ ja $q(x)$ pidevad vahemikus (a, b) ning $x_0 \in (a, b)$. Siis leidub võrrandil (1) parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust (2).

Lineaarne DV

Vaatame lineaarset võrrandit kujul

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Lisame algtingimuse

$$y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

ning moodustame Cauchy ülesande {(1),(2)}.

Lause

Olgu $p(x)$ ja $q(x)$ pidevad vahemikus (a, b) ning $x_0 \in (a, b)$. Siis leidub võrrandil (1) parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust (2).

Lineaarne DV

Vaatame lineaarset võrrandit kujul

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Lisame algtingimuse

$$y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

ning moodustame Cauchy ülesande {(1),(2)}.

Lause

Olgu $p(x)$ ja $q(x)$ pidevad vahemikus (a, b) ning $x_0 \in (a, b)$. Siis leidub võrrandil (1) parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust (2).

Lineaarne DV

Vaatame lineaarset võrrandit kujul

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Lisame algtingimuse

$$y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

ning moodustame Cauchy ülesande {(1),(2)}.

Lause

Olgu $p(x)$ ja $q(x)$ pidevad vahemikus (a, b) ning $x_0 \in (a, b)$. Siis leidub võrrandil (1) parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust (2).

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:

I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).
Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:
I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit). Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:
I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit). Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:
I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).
Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:
I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).
Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:
I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).
Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:
I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).
Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsioongai $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Näide: Lahendada $u' + \frac{1}{x}u = -1$.

Lahendiks on $u = \frac{c}{x^2} - \frac{x}{3}$.

Näide: Lahendada $u' + \frac{1}{x}u = -1$.

Lahendiks on $u = \frac{c}{x^2} - \frac{x}{3}$.

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^{\alpha} = 0$$

$$y^{\alpha}\left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x)\right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^{\alpha} = 0$$

$$y^{\alpha}\left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x)\right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^{\alpha} = 0$$

$$y^{\alpha}\left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x)\right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^{\alpha} = 0$$

$$y^{\alpha}\left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x)\right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^{\alpha} = 0$$

$$y^{\alpha}\left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x)\right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^\alpha = 0$$

$$y^\alpha \left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) \right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^{\alpha} = 0$$

$$y^{\alpha}\left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x)\right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^{\alpha} = 0$$

$$y^{\alpha}\left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x)\right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^{\alpha} = 0$$

$$y^{\alpha}\left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x)\right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Näide: Lahendada

$$3y^2y' - y^3 = x + 1$$

Lahendiks on $y = \sqrt[3]{Ce^x - x - 2}$.

Näide: Lahendada

$$3y^2y' - y^3 = x + 1$$

Lahendiks on $y = \sqrt[3]{Ce^x - x - 2}$.

Riccati diferentsiaalvõrrand

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

Riccati võrrandit saab lahendada juhul, kui on teada üks selle võrrandi lahend y_*. Asendusega $u = y - y_*$ saab Riccati võrrandi teisendada Bernoulli võrrandiks.

Näide: Lahendada

$$y' - y^2 = -\frac{2}{x^2},$$

kus $y_* = \frac{1}{x}$.

Lahendiks on

$$y = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

Riccati diferentsiaalvõrrand

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

Riccati võrrandit saab lahendada juhul, kui on teada üks selle võrrandi lahend y_*. Asendusega $u = y - y_*$ saab Riccati võrrandi teisendada Bernoulli võrrandiks.

Näide: Lahendada

$$y' - y^2 = -\frac{2}{x^2},$$

kus $y_* = \frac{1}{x}$.

Lahendiks on

$$y = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

Riccati diferentsiaalvõrrand

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

Riccati võrrandit saab lahendada juhul, kui on teada üks selle võrrandi lahend y_*. Asendusega $u = y - y_*$ saab Riccati võrrandi teisendada Bernoulli võrrandiks.

Näide: Lahendada

$$y' - y^2 = -\frac{2}{x^2},$$

kus $y_* = \frac{1}{x}$.

Lahendiks on

$$y = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

Riccati diferentsiaalvõrrand

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

Riccati võrrandit saab lahendada juhul, kui on teada üks selle võrrandi lahend y_*. Asendusega $u = y - y_*$ saab Riccati võrrandi teisendada Bernoulli võrrandiks.

Näide: Lahendada

$$y' - y^2 = -\frac{2}{x^2},$$

kus $y_* = \frac{1}{x}$.

Lahendiks on

$$y = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

Riccati diferentsiaalvõrrand

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

Riccati võrrandit saab lahendada juhul, kui on teada üks selle võrrandi lahend y_*. Asendusega $u = y - y_*$ saab Riccati võrrandi teisendada Bernoulli võrrandiks.

Näide: Lahendada

$$y' - y^2 = -\frac{2}{x^2},$$

kus $y_* = \frac{1}{x}$.

Lahendiks on

$$y = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

Riccati diferentsiaalvõrrand

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

Riccati võrrandit saab lahendada juhul, kui on teada üks selle võrrandi lahend y_*. Asendusega $u = y - y_*$ saab Riccati võrrandi teisendada Bernoulli võrrandiks.

Näide: Lahendada

$$y' - y^2 = -\frac{2}{x^2},$$

kus $y_* = \frac{1}{x}$.

Lahendiks on

$$y = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x,y)$ *nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul*

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : \; a < x < b, \; \alpha < y < \beta\}.$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x,y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x,y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x,y): \; a < x < b, \; \alpha < y < \beta\}.$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : \ a < x < b, \ \alpha < y < \beta\}.$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x, y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x, y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x, y) : \; a < x < b, \; \alpha < y < \beta\}.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).

Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).

Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.

Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.

Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx + C(y)\right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx + C(y)\right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx + C(y)\right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx + C(y)\right] = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y) = N(x,y)$$

$$C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Tähistame

$$\phi(x,y) := N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x,y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x,y) := N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x,y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x,y) := N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x,y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

Tähistame

$$\phi(x, y) := N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x, y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

$$C(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right] dy + C_1$$

Seega

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right] dy + C_1.$$

Tarvilik ja piisav tingimus on tõestatud.

$$C(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right] dy + C_1$$

Seega

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right] dy + C_1.$$

Tarvilik ja piisav tingimus on tõestatud.

Võimalikke lahendusviise on kolm:

1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.

Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.

2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.

3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx-xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(x, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x,y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$ peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, *millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.*

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \qquad (3)$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \qquad (4)$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x,y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x,y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x,y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0, \tag{3}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \tag{4}$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x, y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

- Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N}dx.$$

Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N}dx.$$

- Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N}dx.$$

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$. Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y,\ \ \omega = xy,\ \ \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y,\ \ \omega = xy,\ \ \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y,\ \ \omega = xy,\ \ \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N\right) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)} d\omega$$

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y$, $\omega = xy$, $\omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M\right)}d\omega$$

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.
Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.

Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.
Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.