**Diferentsiaalvõrrandiks (DV)** nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
**Harilik diferentsiaalvõrrand** - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

*Näiteks* $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
**Osatuletistega diferentsiaalvõrrand** - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

*Näiteks* $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
**DV lahend** on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
**Integraalkõver, -pind** - lahendi graafik.
**DV lahendamine** - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

**Diferentsiaalvõrrandiks (DV)** nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
**Harilik diferentsiaalvõrrand** - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

*Näiteks* $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
**Osatuletistega diferentsiaalvõrrand** - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

*Näiteks* $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
**DV lahend** on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
**Integraalkõver, -pind** - lahendi graafik.
**DV lahendamine** - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

**Diferentsiaalvõrrandiks (DV)** nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
**Harilik diferentsiaalvõrrand** - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

*Näiteks* $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
**Osatuletistega diferentsiaalvõrrand** - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

*Näiteks* $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
**DV lahend** on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
**Integraalkõver, -pind** - lahendi graafik.
**DV lahendamine** - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

**Diferentsiaalvõrrandiks (DV)** nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
**Harilik diferentsiaalvõrrand** - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

*Näiteks* $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
**Osatuletistega diferentsiaalvõrrand** - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

*Näiteks* $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
**DV lahend** on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
**Integraalkõver, -pind** - lahendi graafik.
**DV lahendamine** - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

**Diferentsiaalvõrrandiks (DV)** nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
**Harilik diferentsiaalvõrrand** - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

*Näiteks* $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
**Osatuletistega diferentsiaalvõrrand** - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

*Näiteks* $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
**DV lahend** on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
**Integraalkõver, -pind** - lahendi graafik.
**DV lahendamine** - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

**Diferentsiaalvõrrandiks (DV)** nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
**Harilik diferentsiaalvõrrand** - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

*Näiteks* $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
**Osatuletistega diferentsiaalvõrrand** - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

*Näiteks* $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
**DV lahend** on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
**Integraalkõver, -pind** - lahendi graafik.
**DV lahendamine** - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

**Diferentsiaalvõrrandiks (DV)** nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
**Harilik diferentsiaalvõrrand** - otsitav on ühe muutuja funktsioon.

*Näiteks* $\cos(x + y') = y$, $y^{(4)} - y'' = 0$ *on HDV.*
**Osatuletistega diferentsiaalvõrrand** - otsitav on mitme muutuja funktsioon.

*Näiteks* $w_x - w_y + w_{xy} = 2$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + e^u = 0$ *on ODV.*
**DV lahend** on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
**Integraalkõver, -pind** - lahendi graafik.
**DV lahendamine** - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

# Esimest järku harilikud DV

Esimest järku harilik diferentsiaalvõrrandi (HDV) **üldkuju**:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

kus $x$ on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ otsitav funktsioon ja $y' = \frac{dy}{dx}$ otsitava funktsiooni tuletis.

Esimest järku HDV **normaalkuju**:

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Esimest järku HDV **sümmeetriline kuju**:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (3)$$

# Esimest järku harilikud DV

Esimest järku harilik diferentsiaalvõrrandi (HDV) **üldkuju**:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

kus $x$ on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ otsitav funktsioon ja $y' = \frac{dy}{dx}$ otsitava funktsiooni tuletis.
Esimest järku HDV **normaalkuju**:

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Esimest järku HDV **sümmeetriline kuju**:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (3)$$

# Esimest järku harilikud DV

Esimest järku harilik diferentsiaalvõrrandi (HDV) **üldkuju**:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

kus $x$ on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ otsitav funktsioon ja $y' = \frac{dy}{dx}$ otsitava funktsiooni tuletis.
Esimest järku HDV **normaalkuju**:

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Esimest järku HDV **sümmeetriline kuju**:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (3)$$

### Definitsioon

*Olgu funktsioon $F(x, y, z)$ määratud xyz-ruumi piirkonnas G. Vahemikus $(a, b)$ määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse võrrandi (1) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning $(x, y(x), y'(x)) \in G$ ja $F(x, y(x), y'(x)) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ korral.*

### Definitsioon

*Olgu funktsioon $f(x, y)$ määratud xy-ruumi piirkonnas D. Vahemikus $(a, b)$ määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse võrrandi (2) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning $(x, y(x)) \in D$ ja $y'(x) = f(x, y(x)) \ \forall x \in (a, b)$ korral.*

### Definitsioon

*Olgu funktsioon* $F(x, y, z)$ *määratud* $xyz$*-ruumi piirkonnas* $G$. *Vahemikus* $(a, b)$ *määratud funktsiooni* $y = y(x)$ *nimetatakse võrrandi (1) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning* $(x, y(x), y'(x)) \in G$ *ja* $F(x, y(x), y'(x)) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ *korral.*

### Definitsioon

*Olgu funktsioon* $f(x, y)$ *määratud* $xy$*-ruumi piirkonnas* $D$. *Vahemikus* $(a, b)$ *määratud funktsiooni* $y = y(x)$ *nimetatakse võrrandi (2) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning* $(x, y(x)) \in D$ *ja* $y'(x) = f(x, y(x)) \ \forall x \in (a, b)$ *korral.*

**Cauchy ülesanne** esimest järku HDV jaoks:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (2) \\ y(x_0) = y_0, & (4) \end{cases}$$

kus $x_0,\ y_0$ on mingid antud reaalarvud.

**Teoreem**

*Olgu $f(x, y)$ pidev kahe muutuja funktsioon piirkonnas D. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.*

Teoreem on tuntud ka Peano teoreemi või lahendi olemasolu teoreemina.

**Cauchy ülesanne** esimest järku HDV jaoks:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & (2) \\ y(x_0) = y_0, & (4) \end{cases}$$

kus $x_0,\ y_0$ on mingid antud reaalarvud.

### Teoreem

*Olgu $f(x,y)$ pidev kahe muutuja funktsioon piirkonnas $D$. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.*

Teoreem on tuntud ka Peano teoreemi või lahendi olemasolu teoreemina.

**Cauchy ülesanne** esimest järku HDV jaoks:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (2) \\ y(x_0) = y_0, & (4) \end{cases}$$

kus $x_0, \ y_0$ on mingid antud reaalarvud.

### Teoreem

*Olgu $f(x, y)$ pidev kahe muutuja funktsioon piirkonnas $D$. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.*

Teoreem on tuntud ka Peano teoreemi või lahendi olemasolu teoreemina.

**Teoreem**

*Olgu $f(x, y)$ pidev piirkonnas D ning olgu tal selles piirkonnas olemas pidev osatuletis $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.*

See teoreem on Cauchy teoreem ehk lahendi ühesuse teoreem.

**Definitsioon**

*Võrrandi (2) üldlahendiks piirkonnas D nimetatakse suvalisest konstandist C sõltuvat lahendit $y = y(x, C)$, mille korral iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral leidub konstandi C selline väärtus $C_0$, et lahend $y = y(x, C_0)$ rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.*

**Teoreem**

*Olgu $f(x, y)$ pidev piirkonnas D ning olgu tal selles piirkonnas olemas pidev osatuletis $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.*

See teoreem on Cauchy teoreem ehk lahendi ühesuse teoreem.

**Definitsioon**

*Võrrandi (2) üldlahendiks piirkonnas D nimetatakse suvalisest konstandist C sõltuvat lahendit $y = y(x, C)$, mille korral iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral leidub konstandi C selline väärtus $C_0$, et lahend $y = y(x, C_0)$ rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.*

### Teoreem

*Olgu $f(x, y)$ pidev piirkonnas $D$ ning olgu tal selles piirkonnas olemas pidev osatuletis $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.*

See teoreem on Cauchy teoreem ehk lahendi ühesuse teoreem.

### Definitsioon

*Võrrandi (2) üldlahendiks piirkonnas $D$ nimetatakse suvalisest konstandist $C$ sõltuvat lahendit $y = y(x, C)$, mille korral iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral leidub konstandi $C$ selline väärtus $C_0$, et lahend $y = y(x, C_0)$ rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.*

Definitsioon

*Võrrandi (2) erilahendiks nimetatakse lahendit, mis saadakse üldlahendist konstandi C fikseerimisega.*

# Näited ülesannetest, mis toovad I järku HDVni

**Kasvamine ja kahanemine**

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

kus otsitav on $x = x(t)$, tema tuletis $x' = \frac{dx}{dt}$, $t$ on sõltumatu muutuja ja $k$ on võrdetegur.

*Radioktiivne lagunemine*

Olgu $x(t)$ radioktiivse aine mass ajamomendil $t$. Suurus $x'(t)$ väljendab radioktiivse lagunemise kiirust. Vastavalt radioktiivse lagunemise seadusele on lagunemise kiirus $x'(t)$ võrdeline veel lagunemata aine hulgaga $x(t)$ :

$$\frac{dx}{dt} = -ax.$$

Üldlahend: $x = Ce^{-at}$.

# Näited ülesannetest, mis toovad I järku HDVni

**Kasvamine ja kahanemine**

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

kus otsitav on $x = x(t)$, tema tuletis $x' = \frac{dx}{dt}$, $t$ on sõltumatu muutuja ja $k$ on võrdetegur.

*Radioktiivne lagunemine*

Olgu $x(t)$ radioktiivse aine mass ajamomendil $t$. Suurus $x'(t)$ väljendab radioktiivse lagunemise kiirust. Vastavalt radioktiivse lagunemise seadusele on lagunemise kiirus $x'(t)$ võrdeline veel lagunemata aine hulgaga $x(t)$ :

$$\frac{dx}{dt} = -ax.$$

Üldlahend: $x = Ce^{-at}$.

# Näited ülesannetest, mis toovad I järku HDVni

**Kasvamine ja kahanemine**

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

kus otsitav on $x = x(t)$, tema tuletis $x' = \frac{dx}{dt}$, $t$ on sõltumatu muutuja ja $k$ on võrdetegur.

*Radioktiivne lagunemine*

Olgu $x(t)$ radioktiivse aine mass ajamomendil $t$. Suurus $x'(t)$ väljendab radioktiivse lagunemise kiirust. Vastavalt radioktiivse lagunemise seadusele on lagunemise kiirus $x'(t)$ võrdeline veel lagunemata aine hulgaga $x(t)$ :

$$\frac{dx}{dt} = -ax.$$

Üldlahend: $x = Ce^{-at}$.

Cauchy ülesande (algtingimus $x(0) = x_0$) lahend: $x = x_0 e^{-at}$.

*Populatsiooni arvukus*
*Malthusi mudel*
Olgu $y(t)$ mingi bioloogilise liigi isendite arv ajahetkel $t$ ($y(t) \geq 0$.) Liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on proportsionaalne isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

DV lahend $y = y_0 e^{kt}$, kus $y_0$ on isendite arv alghetkel.

Cauchy ülesande (algtingimus $x(0) = x_0$) lahend: $\quad x = x_0 e^{-at}$.

*Populatsiooni arvukus*
*Malthusi mudel*
Olgu $y(t)$ mingi bioloogilise liigi isendite arv ajahetkel $t$ ($y(t) \geq 0$.) Liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on proportsionaalne isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

DV lahend $y = y_0 e^{kt}$, kus $y_0$ on isendite arv alghetkel.

**Näide:** Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel $t$. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.
$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

**Näide:** Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel $t$. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.

$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

**Näide:** Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel $t$. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.
$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

**Näide:** Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel $t$. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.
$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

**Näide:** Olgu $p(t)$ inimeste arv maailmas hetkel $t$. On teada, et inimkond suurenes 1960-1970 keskeltläbi 2%. 1. jaanuaril 1965 hinnati elanikkonnaks 3,34 miljardit inimest.
$t_0 = 1965, \quad p_0 = 3,34 \cdot 10^9, \quad k = 0,02.$

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0.02T}$$

Arvutame mudelist aja, millega inimkond suureneks kaks korda.

$$e^{0.02T} = 2 \qquad T = 50 \ln 2 \approx 34,6.$$

Mõõtmistulemuste põhjal oli selleks ajaks 35 aastat.
Aastal 2515 200 000 miljardit inimest, aastaks 2660 *ca* 3 600 000 miljardit.

*Verhulsti mudel*

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2,$$

kus $a,\ b$ on konstandid, $y = y(t)$ otsitav ja $t$ on sõltumatu muutuja.

## Soojenemine ja jahenemine

Olgu ajahetkel $t$ keha temperatuur $T(t)$, seda keha ümbritseva õhu temperatuur $T_0$, siis keha temperatuuri muutus on kirjeldatav

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

kus $k > 0$ on võrdetegur.
Lahend: $T = T_0 + Ce^{-kt}$.

**Soojenemine ja jahenemine**

Olgu ajahetkel $t$ keha temperatuur $T(t)$, seda keha ümbritseva õhu temperatuur $T_0$, siis keha temperatuuri muutus on kirjeldatav

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

kus $k > 0$ on võrdetegur.

Lahend: $T = T_0 + Ce^{-kt}$.

**Soojenemine ja jahenemine**
Olgu ajahetkel $t$ keha temperatuur $T(t)$, seda keha ümbritseva õhu temperatuur $T_0$, siis keha temperatuuri muutus on kirjeldatav

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

kus $k > 0$ on võrdetegur.
Lahend: $T = T_0 + Ce^{-kt}$.

**Näide:** Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?

Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

**Näide:** Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?
Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

**Näide:** Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?
Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

**Näide:** Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?
Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

**Näide:** Kraadiklaas, mis näitas toas 18 C, asetati õue. Kümne minuti pärast näitas kraad 23 C, järgmise kümne minuti pärast 26 C. Milline oli välistemperatuur?
Algtingimus $T(0) = 18$, seega $18 = T_0 + C$ ja $C = 18 - T_0$.

$$T = T_0 + (18 - T_0)e^{-kt}$$

Teame, et $T(10) = 23$ ja $T(20) = 26$.

$$\begin{cases} 23 = T_0 + (18 - T_0)e^{-10k} \\ 26 = T_0 + (18 - T_0)e^{-20k} \end{cases}$$

$$\frac{18 - T_0}{26 - T_0} = \left(\frac{18 - T_0}{23 - T_0}\right)^2$$

$$(23 - T_0)^2 = (18 - T_0)(26 - T_0)$$

$$529 - 46T_0 + T_0^2 = 468 - 44T_0 + T_0^2$$

$$2T_0 = 61$$

$$T_0 = 30,5$$

Määrame konstandi $k$ :

$$k = \frac{1}{10} \ln \left( \frac{18 - T_0}{23 - T_0} \right) = \frac{1}{10} \ln \left( \frac{18 - 30,5}{23 - 30,5} \right) =$$

$$= \frac{1}{10} \ln \left( \frac{12,5}{7,5} \right) = 0.051$$

$$T(t) = 30,5 + (18 - 30,5)e^{-0,051t} =$$

$$= 30,5 - 12,5e^{-0,051t}$$

# Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks on eralduvate muutujatega DV

$$2xdx - \sin ydy = 0,$$

samuti

$$e^x = \ln y \cdot y'.$$

# Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks on eralduvate muutujatega DV

$$2xdx - \sin y dy = 0,$$

samuti

$$e^x = \ln y \cdot y'.$$

# Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \qquad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks on eralduvate muutujatega DV

$$2xdx - \sin y dy = 0,$$

samuti

$$e^x = \ln y \cdot y'.$$

# Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks on eralduvate muutujatega DV

$$2xdx - \sin y dy = 0,$$

samuti

$$e^x = \ln y \cdot y'.$$

## Teoreem

Olgu $M(x)$ pidev vahemikus $(a, b)$, ja $N(y)$ pidev vahemikus $(\alpha, \beta)$ ning $\forall\ (x, y) \in D = \{(x, y) : x \in (a, b),\ \ y \in (\alpha, \beta)\}$ korral $M^2(x) + N^2(y) \neq 0$, siis on võrrandi (1) üldlahendiks

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \qquad (2)$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0, \qquad (2')$$

kus $(x_0, y_0)$ on suvaline fikseeritud punkt piirkonnas $D$.

## Teoreem

Olgu $M(x)$ pidev vahemikus $(a, b)$, ja $N(y)$ pidev vahemikus $(\alpha, \beta)$ ning $\forall\ (x, y) \in D = \{(x, y) : x \in (a, b),\ \ y \in (\alpha, \beta)\}$ korral $M^2(x) + N^2(y) \neq 0$, siis on võrrandi (1) üldlahendiks

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \qquad (2)$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0, \qquad (2')$$

kus $(x_0, y_0)$ on suvaline fikseeritud punkt piirkonnas $D$.

## Tõestus

**I** Näitame, et (1)$\Longleftrightarrow$(2).

**II** Näitame, et Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} M(x)dx + N(y)dy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on üheselt lahenduv ning lahend esitub kujul

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0.$$

## Tõestus

**I** Näitame, et (1)$\Longleftrightarrow$(2).
**II** Näitame, et Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} M(x)dx + N(y)dy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on üheselt lahenduv ning lahend esitub kujul

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0.$$

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.

*Olgu $\Phi(x, y)$ korral täidetud:*
*a) $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ ja $\Phi_y(x, y)$ määratud ja pidevad punkti $(x_0, y_0)$ mingis ümbruses;*
*b) $\Phi(x_0, y_0) = 0$;*
*c) $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. (või $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$)*
*Siis $\Phi(x, y) = 0$ esitab parajasti ühe funktsiooni $y = \varphi(x)$ (või $x = \xi(y)$), millel on järgmised omadused:*
*1) $\varphi(x)$ ($\xi(y)$) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv $x_0$ ($y_0$) mingis ümbruses ;*
*2) $\varphi(x_0) = y_0$ ($\xi(y_0) = x_0$);*
*3) $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ $x_0$ mingis ümbruses ($\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ $y_0$ mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.
*Olgu* $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*
*a)* $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* $(x_0, y_0)$ *mingis ümbruses;*
*b)* $\Phi(x_0, y_0) = 0$;
*c)* $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*
*Siis* $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*
*1)* $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* $x_0$ *(*$y_0$*) mingis ümbruses ;*
*2)* $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*
*3)* $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ $x_0$ *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ $y_0$ *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.

*Olgu* $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*

*a)* $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* $(x_0, y_0)$ *mingis ümbruses;*

*b)* $\Phi(x_0, y_0) = 0$;

*c)* $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*

*Siis* $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*

*1)* $\varphi(x)$ $(\xi(y))$ *on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* $x_0$ $(y_0)$ *mingis ümbruses ;*

*2)* $\varphi(x_0) = y_0$ $(\xi(y_0) = x_0)$*;*

*3)* $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ $x_0$ *mingis ümbruses* $(\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ $y_0$ *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.
*Olgu* $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*
*a)* $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* $(x_0, y_0)$ *mingis ümbruses;*
*b)* $\Phi(x_0, y_0) = 0$;
*c)* $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*
*Siis* $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*
*1)* $\varphi(x)$ $(\xi(y))$ *on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* $x_0$ $(y_0)$ *mingis ümbruses ;*
*2)* $\varphi(x_0) = y_0$ $(\xi(y_0) = x_0)$*;*
*3)* $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ $x_0$ *mingis ümbruses* $(\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ $y_0$ *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.
*Olgu* $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*
*a)* $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* $(x_0, y_0)$ *mingis ümbruses;*
*b)* $\Phi(x_0, y_0) = 0$;
*c)* $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*
*Siis* $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*
*1)* $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* $x_0$ *(*$y_0$*) mingis ümbruses ;*
*2)* $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*
*3)* $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ $x_0$ *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ $y_0$ *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.

*Olgu* $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*

*a)* $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* $(x_0, y_0)$ *mingis ümbruses;*

*b)* $\Phi(x_0, y_0) = 0$;

*c)* $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*

*Siis* $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*

*1)* $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* $x_0$ *(*$y_0$*) mingis ümbruses ;*

*2)* $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*

*3)* $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ $x_0$ *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ $y_0$ *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.

*Olgu* $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*

*a)* $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* $(x_0, y_0)$ *mingis ümbruses;*

*b)* $\Phi(x_0, y_0) = 0$;

*c)* $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*

*Siis* $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*

*1)* $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* $x_0$ *(*$y_0$*) mingis ümbruses ;*

*2)* $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*

*3)* $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ $x_0$ *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ $y_0$ *mingis ümbruses).*

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.
*Olgu* $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*
*a)* $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* $(x_0, y_0)$ *mingis ümbruses;*
*b)* $\Phi(x_0, y_0) = 0$;
*c)* $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*
*Siis* $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*
*1)* $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* $x_0$ *(*$y_0$*) mingis ümbruses ;*
*2)* $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*
*3)* $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ $x_0$ *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ $y_0$ *mingis ümbruses).*

# Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

# Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

# Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

# Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

# Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x),\ N_1(y),\ M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

# Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x),\ N_1(y),\ M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

(5) üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

(5) üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

(5) üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

# Homogeenne DV

Vaatame funktsiooni $f(x, y)$, mis on määratud $D \subset \mathbf{R}$. Olgu $D$ selline, et $\forall (x, y) \in D$ korral $(tx, ty) \in D \; \forall t > 0$.

**Definitsioon**

Funktsiooni $F(x, y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x, y)$$

$\forall t > 0$, $\forall (x, y) \in D$.

# Homogeenne DV

Vaatame funktsiooni $f(x, y)$, mis on määratud $D \subset$ **R.** Olgu $D$ selline, et $\forall(x, y) \in D$ korral $(tx, ty) \in D \ \forall t > 0$.

### Definitsioon

Funktsiooni $F(x, y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x, y)$$

$\forall t > 0, \forall(x, y) \in D$.

Näiteks on funktsioonid

$$f(x, y) = \frac{y - x}{x}$$

$$g(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$$

homogeensed funktsioonid, ent

$$h(x, y) = \frac{x^3 + x^2 y}{2 - y^3}$$

ei ole homogeenne.

Näiteks on funktsioonid

$$f(x, y) = \frac{y - x}{x}$$

$$g(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$$

homogeensed funktsioonid, ent

$$h(x, y) = \frac{x^3 + x^2 y}{2 - y^3}$$

ei ole homogeenne.

## Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ nimetatakse homogeenseks, kui $f(x, y)$ on $0-$astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad t > 0.$$

## Lause

Homogeenne DV $y' = f(x, y)$ taandub muutujate $(x, u)$ suhtes eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega $u = \frac{y}{x}$.

## Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ nimetatakse homogeenseks, kui $f(x, y)$ on $0-$astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad t > 0.$$

## Lause

Homogeenne DV $y' = f(x, y)$ taandub muutujate $(x, u)$ suhtes eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega $u = \frac{y}{x}$.