Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus $f_1, \ldots, f_m$ on funktsioonid.

Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$.

Võrrandisüsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$.

Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$, ehk

Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus $f_1, \ldots, f_m$ on funktsioonid.
Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$.
Võrrandisüsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$.
Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$, ehk

Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus $f_1, \ldots, f_m$ on funktsioonid.
Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$.
Võrrandisüsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$.
Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$, ehk

Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus $f_1, \ldots, f_m$ on funktsioonid.
Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$.
Võrrandisüsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$.
Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$, ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Hariliku iteratsioonimeetodi kuju on

$$x^n = G(x^{n-1})$$

või võrrandite kaupa

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ \ldots \\ x_m^n = g_m(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Siit on lihtne tuletada **Seideli iteratsioonimeetodi** (või ka Gaussi-Seideli iteratsioonimeetod) eeskiri:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Hariliku iteratsioonimeetodi kuju on

$$x^n = G(x^{n-1})$$

või võrrandite kaupa

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ \ldots \\ x_m^n = g_m(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Siit on lihtne tuletada **Seideli iteratsioonimeetodi** (või ka Gaussi-Seideli iteratsioonimeetod) eeskiri:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Hariliku iteratsioonimeetodi kuju on

$$x^n = G(x^{n-1})$$

või võrrandite kaupa

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ \ldots \\ x_m^n = g_m(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Siit on lihtne tuletada **Seideli iteratsioonimeetodi** (või ka Gaussi-Seideli iteratsioonimeetod) eeskiri:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Hariliku iteratsioonimeetodi kuju on

$$x^n = G(x^{n-1})$$

või võrrandite kaupa

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ \ldots \\ x_m^n = g_m(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Siit on lihtne tuletada **Seideli iteratsioonimeetodi** (või ka Gaussi-Seideli iteratsioonimeetod) eeskiri:

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; x_3^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^n; x_2^{n-1}; x_3^{n-1} \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_3^n = g_3(x_1^n; x_2^n; x_3^{n-1} \ldots; x_m^{n-1}) \\ \ldots \\ x_m^n = g_m(x_1^n; x_2^n; \ldots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Oluline tingimus mõlema meetodi koondumiseks

$$||G'(x)|| \leq q < 1.$$

$$
\begin{cases}
x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; x_3^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\
x_2^n = g_2(x_1^n; x_2^{n-1}; x_3^{n-1} \ldots; x_m^{n-1}) \\
x_3^n = g_3(x_1^n; x_2^n; x_3^{n-1} \ldots; x_m^{n-1}) \\
\ldots \\
x_m^n = g_m(x_1^n; x_2^n; \ldots; x_m^{n-1})
\end{cases}
$$

Oluline tingimus mõlema meetodi koondumiseks

$$||G'(x)|| \leq q < 1.$$

Lineaarse süsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = y_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = y_m. \end{cases}$$

jaoks on harilik iteratsioonimeetod kujul

$$\begin{cases} x_1^n = -\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2^{n-1} + a_{13}x_3^{n-1} + \ldots + a_{1m}x_m^{n-1} - y_1\right) \\ x_2^n = -\frac{1}{a_{22}}\left(a_{21}x_1^{n-1} + a_{23}x_3^{n-1} + \ldots + a_{2m}x_m^{n-1} - y_2\right) \\ \ldots \\ x_m^n = -\frac{1}{a_{mm}}\left(a_{m1}x_1^{n-1} + a_{m2}x_2^{n-1} + \ldots + a_{m,m-1}x_{m-1}^{n-1} - y_m\right). \end{cases}$$

Lineaarse süsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = y_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = y_m. \end{cases}$$

jaoks on harilik iteratsioonimeetod kujul

$$\begin{cases} x_1^n = -\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2^{n-1} + a_{13}x_3^{n-1} + \ldots + a_{1m}x_m^{n-1} - y_1\right) \\ x_2^n = -\frac{1}{a_{22}}\left(a_{21}x_1^{n-1} + a_{23}x_3^{n-1} + \ldots + a_{2m}x_m^{n-1} - y_2\right) \\ \ldots \\ x_m^n = -\frac{1}{a_{mm}}\left(a_{m1}x_1^{n-1} + a_{m2}x_2^{n-1} + \ldots + a_{m,m-1}x_{m-1}^{n-1} - y_m\right). \end{cases}$$

Seideli meetod lineaarse süsteemi lahendamiseks

$$\begin{cases} x_1^n = -\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2^{n-1} + a_{13}x_3^{n-1} + \ldots + a_{1m}x_m^{n-1} - y_1\right) \\ x_2^n = -\frac{1}{a_{22}}\left(a_{21}x_1^{n} + a_{23}x_3^{n-1} + \ldots + a_{2m}x_m^{n-1} - y_2\right) \\ \ldots \\ x_m^n = -\frac{1}{a_{mm}}\left(a_{m1}x_1^{n} + a_{m2}x_2^{n} + \ldots + a_{m,m-1}x_{m-1}^{n} - y_m\right). \end{cases}$$

Newtoni meetod

Võrrandi $f(x) = 0$ korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul $F(x) = 0$. Siin $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Newtoni meetodi algoritm

$$x^n = x^{n-1} - \left[F'(x^{n-1})\right]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \ldots, x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod

Võrrandi $f(x) = 0$ korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul $F(x) = 0$. Siin $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Newtoni meetodi algoritm

$$x^n = x^{n-1} - \left[F'(x^{n-1})\right]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \ldots, x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod

Võrrandi $f(x) = 0$ korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul $F(x) = 0$. Siin $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Newtoni meetodi algoritm

$$x^n = x^{n-1} - \left[F'(x^{n-1})\right]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \ldots, x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod
Võrrandi $f(x) = 0$ korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul $F(x) = 0$. Siin $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.
Newtoni meetodi algoritm

$$x^n = x^{n-1} - \left[F'(x^{n-1})\right]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod on ruutkoonduvusega, st

$$||x^n - x^*|| \leq C||x^{n-1} - x^*||^2.$$

Modifitseeritud Newtoni meetod

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^0)]^{-1} F(x^{n-1})$$

Meetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Newtoni meetod on ruutkoonduvusega, st

$$||x^n - x^*|| \leq C||x^{n-1} - x^*||^2.$$

Modifitseeritud Newtoni meetod

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^0)]^{-1} F(x^{n-1})$$

Meetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Newtoni meetod on ruutkoonduvusega, st

$$||x^n - x^*|| \leq C||x^{n-1} - x^*||^2.$$

Modifitseeritud Newtoni meetod

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^0)]^{-1}F(x^{n-1})$$

Meetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Ekstreemumülesannete lahendamine

Vaatame m-muutuja funktsioon $f(x)$, mille argumendiks on $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$ ning vaja on leida selle funktsiooni maksimum või miinimum. Funktsiooni miinimumi leidmiseks saab kasutada iteratiivseid meetodeid, mille korral liigutakse järk-järgult miinimumpunkti poole funktsiooni kahanemise suunas. Olgu algähend $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_m^0) \in R^m$ ja arvutame funktsiooni $f(x)$ gradiendi punktis x^0:

$$v^0 = \mathrm{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^0); \ldots; \frac{\partial}{\partial x_m} f(x^0) \right).$$

Ekstreemumülesannete lahendamine

Vaatame m-muutuja funktsioon $f(x)$, mille argumendiks on $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$ ning vaja on leida selle funktsiooni maksimum või miinimum. Funktsiooni miinimumi leidmiseks saab kasutada iteratiivseid meetodeid, mille korral liigutakse järk-järgult miinimumpunkti poole funktsiooni kahanemise suunas. Olgu algähend $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_m^0) \in R^m$ ja arvutame funktsiooni $f(x)$ gradiendi punktis x^0:

$$v^0 = \mathrm{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^0); \ldots; \frac{\partial}{\partial x_m} f(x^0) \right).$$

Ekstreemumülesannete lahendamine

Vaatame m-muutuja funktsioon $f(x)$, mille argumendiks on $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$ ning vaja on leida selle funktsiooni maksimum või miinimum. Funktsiooni miinimumi leidmiseks saab kasutada iteratiivseid meetodeid, mille korral liigutakse järk-järgult miinimumpunkti poole funktsiooni kahanemise suunas. Olgu algähend $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_m^0) \in R^m$ ja arvutame funktsiooni $f(x)$ gradiendi punktis x^0:

$$v^0 = \mathrm{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^0); \ldots; \frac{\partial}{\partial x_m} f(x^0) \right).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**.

Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1} v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1} v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1} v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Selliseid tingimusi nimetatakse interpolatsioonitingimusteks. Funktsiooni $\Phi(x)$ nimetatakse **interpolandiks**.

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Selliseid tingimusi nimetatakse interpolatsioonitingimusteks. Funktsiooni $\Phi(x)$ nimetatakse **interpolandiks**.

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Selliseid tingimusi nimetatakse interpolatsioonitingimusteks. Funktsiooni $\Phi(x)$ nimetatakse **interpolandiks**.

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Selliseid tingimusi nimetatakse interpolatsioonitingimusteks.
Funktsiooni $\Phi(x)$ nimetatakse **interpolandiks.**

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Selliseid tingimusi nimetatakse interpolatsioonitingimusteks. Funktsiooni $\Phi(x)$ nimetatakse **interpolandiks**.

Lagrange'i interpolatsioonipolünoom

Olgu $\Phi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ ($n-$astme polünoom), kus c_j ($j = 0, 1, \ldots, n$) on kordajad.

Teoreem

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi esitatakse Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.

Lagrange'i interpolatsioonipolünoom

Olgu $\Phi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ ($n-$astme polünoom), kus c_j ($j = 0, 1, \ldots, n$) on kordajad.

Teoreem

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi esitatakse Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.

Lagrange'i interpolatsioonipolünoom

Olgu $\Phi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ ($n-$astme polünoom), kus c_j ($j = 0, 1, \ldots, n$) on kordajad.

Teoreem

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi esitatakse Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.

Näide

Funktsioon on esitatud tabelina:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Leiame interpolatsioonipolünoomi ning arvutame $\Phi(2,3)$.
Lagrange'i interpolatsioonipolünoom tuleb kujule

$$\Phi(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(0-1)(0-4)(0-9)} \cdot 0 + \frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(1-0)(1-4)(1-9)} \cdot 1 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(4-0)(4-1)(4-9)} \cdot 2 + \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(9-0)(9-1)(9-4)} \cdot 3 =$$

$$= \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{37}{30}x$$

Kontrollime interpolatsioonitingimuste täidetust:

Näide

Funktsioon on esitatud tabelina:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Leiame interpolatsioonipolünoomi ning arvutame $\Phi(2,3)$.

Lagrange'i interpolatsioonipolünoom tuleb kujule

$$\Phi(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(0-1)(0-4)(0-9)} \cdot 0 + \frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(1-0)(1-4)(1-9)} \cdot 1 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(4-0)(4-1)(4-9)} \cdot 2 + \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(9-0)(9-1)(9-4)} \cdot 3 =$$

$$= \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{37}{30}x$$

Kontrollime interpolatsioonitingimuste täidetust:

Näide

Funktsioon on esitatud tabelina:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Leiame interpolatsioonipolünoomi ning arvutame $\Phi(2,3)$.

Lagrange'i interpolatsioonipolünoom tuleb kujule

$$\Phi(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(0-1)(0-4)(0-9)}\cdot 0 + \frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(1-0)(1-4)(1-9)}\cdot 1 +$$

$$+\frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(4-0)(4-1)(4-9)}\cdot 2 + \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(9-0)(9-1)(9-4)}\cdot 3 =$$

$$= \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{37}{30}x$$

Kontrollime interpolatsioonitingimuste täidetust:

Näide

Funktsioon on esitatud tabelina:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Leiame interpolatsioonipolünoomi ning arvutame $\Phi(2,3)$.
Lagrange'i interpolatsioonipolünoom tuleb kujule

$$\Phi(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(0-1)(0-4)(0-9)} \cdot 0 + \frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(1-0)(1-4)(1-9)} \cdot 1 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(4-0)(4-1)(4-9)} \cdot 2 + \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(9-0)(9-1)(9-4)} \cdot 3 =$$

$$= \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{37}{30}x$$

Kontrollime interpolatsioonitingimuste täidetust:

$\Phi(0) = \frac{1}{60} \cdot 0^3 - \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{37}{30} \cdot 0 = 0$

$\Phi(1) = \frac{1}{60} \cdot 1^3 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{37}{30} \cdot 1 = 1$

$\Phi(4) = \frac{1}{60} \cdot 4^3 - \frac{1}{4} \cdot 4^2 + \frac{37}{30} \cdot 4 = 2$

$\Phi(9) = \frac{1}{60} \cdot 9^3 - \frac{1}{4} \cdot 9^2 + \frac{37}{30} \cdot 9 = 3$

Interpolatsioonitingimused on täidetud ning seega saame leida

$$f(2,3) \approx \Phi(2,3) = \frac{1}{60} \cdot 2,3^3 - \frac{1}{4} \cdot 2,3^2 + \frac{37}{30} \cdot 2,3 \approx 1,71695.$$

Antud näites $f(x) = \sqrt{x}$ ning täpne väärtus $\sqrt{2,3} \approx 1,5166$.

$\Phi(0) = \frac{1}{60} \cdot 0^3 - \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{37}{30} \cdot 0 = 0$

$\Phi(1) = \frac{1}{60} \cdot 1^3 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{37}{30} \cdot 1 = 1$

$\Phi(4) = \frac{1}{60} \cdot 4^3 - \frac{1}{4} \cdot 4^2 + \frac{37}{30} \cdot 4 = 2$

$\Phi(9) = \frac{1}{60} \cdot 9^3 - \frac{1}{4} \cdot 9^2 + \frac{37}{30} \cdot 9 = 3$

Interpolatsioonitingimused on täidetud ning seega saame leida

$$f(2,3) \approx \Phi(2,3) = \frac{1}{60} \cdot 2,3^3 - \frac{1}{4} \cdot 2,3^2 + \frac{37}{30} \cdot 2,3 \approx 1,71695.$$

Antud näites $f(x) = \sqrt{x}$ ning täpne väärtus $\sqrt{2,3} \approx 1,5166$.

$$\Phi(0) = \tfrac{1}{60} \cdot 0^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 0 = 0$$

$$\Phi(1) = \tfrac{1}{60} \cdot 1^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 1 = 1$$

$$\Phi(4) = \tfrac{1}{60} \cdot 4^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 4^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 4 = 2$$

$$\Phi(9) = \tfrac{1}{60} \cdot 9^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 9^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 9 = 3$$

Interpolatsioonitingimused on täidetud ning seega saame leida

$$f(2,3) \approx \Phi(2,3) = \frac{1}{60} \cdot 2,3^3 - \frac{1}{4} \cdot 2,3^2 + \frac{37}{30} \cdot 2,3 \approx 1,71695.$$

Antud näites $f(x) = \sqrt{x}$ ning täpne väärtus $\sqrt{2,3} \approx 1,5166$.

$$\Phi(0) = \tfrac{1}{60} \cdot 0^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 0 = 0$$

$$\Phi(1) = \tfrac{1}{60} \cdot 1^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 1 = 1$$

$$\Phi(4) = \tfrac{1}{60} \cdot 4^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 4^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 4 = 2$$

$$\Phi(9) = \tfrac{1}{60} \cdot 9^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 9^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 9 = 3$$

Interpolatsioonitingimused on täidetud ning seega saame leida

$$f(2,3) \approx \Phi(2,3) = \frac{1}{60} \cdot 2,3^3 - \frac{1}{4} \cdot 2,3^2 + \frac{37}{30} \cdot 2,3 \approx 1,71695.$$

Antud näites $f(x) = \sqrt{x}$ ning täpne väärtus $\sqrt{2,3} \approx 1,5166$.

$$\Phi(0) = \tfrac{1}{60} \cdot 0^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 0 = 0$$

$$\Phi(1) = \tfrac{1}{60} \cdot 1^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 1 = 1$$

$$\Phi(4) = \tfrac{1}{60} \cdot 4^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 4^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 4 = 2$$

$$\Phi(9) = \tfrac{1}{60} \cdot 9^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 9^2 + \tfrac{37}{30} \cdot 9 = 3$$

Interpolatsioonitingimused on täidetud ning seega saame leida

$$f(2,3) \approx \Phi(2,3) = \frac{1}{60} \cdot 2,3^3 - \frac{1}{4} \cdot 2,3^2 + \frac{37}{30} \cdot 2,3 \approx 1,71695.$$

Antud näites $f(x) = \sqrt{x}$ ning täpne väärtus $\sqrt{2,3} \approx 1,5166$.

$\Phi(0) = \frac{1}{60} \cdot 0^3 - \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{37}{30} \cdot 0 = 0$

$\Phi(1) = \frac{1}{60} \cdot 1^3 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{37}{30} \cdot 1 = 1$

$\Phi(4) = \frac{1}{60} \cdot 4^3 - \frac{1}{4} \cdot 4^2 + \frac{37}{30} \cdot 4 = 2$

$\Phi(9) = \frac{1}{60} \cdot 9^3 - \frac{1}{4} \cdot 9^2 + \frac{37}{30} \cdot 9 = 3$

Interpolatsioonitingimused on täidetud ning seega saame leida

$$f(2,3) \approx \Phi(2,3) = \frac{1}{60} \cdot 2,3^3 - \frac{1}{4} \cdot 2,3^2 + \frac{37}{30} \cdot 2,3 \approx 1,71695.$$

Antud näites $f(x) = \sqrt{x}$ ning täpne väärtus $\sqrt{2,3} \approx 1,5166$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Newtoni interpolatsioonipolünoom

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhteks nimetatakse suurust

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhteks nimetatakse suurust

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ $m-$järku diferentssuhteks nimetatakse suurust, mis avaldub
$m-1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) - f(x_i, \ldots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Newtoni interpolatsioonipolünoom

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhteks nimetatakse suurust

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhteks nimetatakse suurust

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ $m-$järku diferentssuhteks nimetatakse suurust, mis avaldub
$m-1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) - f(x_i, \ldots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Newtoni interpolatsioonipolünoom

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhteks nimetatakse suurust

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhteks nimetatakse suurust

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ $m-$järku diferentssuhteks nimetatakse suurust, mis avaldub
$m-1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks.**

$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

Newtoni meetodi eelisteks on lihtsus arvutamisel ning interpolatsioonisõlmede lisamisel on kergem tõsta interpolatsioonipolünoomi asteti.

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks**.
$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.
Newtoni meetodi eelisteks on lihtsus arvutamisel ning interpolatsioonisõlmede lisamisel on kergem tõsta interpolatsioonipolünoomi asteti.

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks.**
$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.
Newtoni meetodi eelisteks on lihtsus arvutamisel ning interpolatsioonisõlmede lisamisel on kergem tõsta interpolatsioonipolünoomi asteti.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele ($n \to \infty$), kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

ning igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$ valime sõlmed

$$x_i = y_{i,0} < y_{i,1} < \ldots < y_{i,l} = x_{i+1}.$$

Olgu sõlmedes $y_{i,j}$ antud funktsiooni väärtused $f(y_{i,j})$. Igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi $\Phi(y_{i,j}) = f(y_{i,j})$.
Nii saame tükiti polünomiaalse funktsiooni $\Phi(x)$ liitekohtadega punktides x_i. Etteantud interpolatsioonitingimuste tõttu on interpolant sõlmedes x_i pidev.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele ($n \to \infty$), kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

ning igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$ valime sõlmed

$$x_i = y_{i,0} < y_{i,1} < \ldots < y_{i,l} = x_{i+1}.$$

Olgu sõlmedes $y_{i,j}$ antud funktsiooni väärtused $f(y_{i,j})$. Igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi $\Phi(y_{i,j}) = f(y_{i,j})$.
Nii saame tükiti polünomiaalse funktsiooni $\Phi(x)$ liitekohtadega punktides x_i. Etteantud interpolatsioonitingimuste tõttu on interpolant sõlmedes x_i pidev.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele ($n \to \infty$), kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

ning igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$ valime sõlmed

$$x_i = y_{i,0} < y_{i,1} < \ldots < y_{i,l} = x_{i+1}.$$

Olgu sõlmedes $y_{i,j}$ antud funktsiooni väärtused $f(y_{i,j})$. Igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi $\Phi(y_{i,j}) = f(y_{i,j})$.

Nii saame tükiti polünomiaalse funktsiooni $\Phi(x)$ liitekohtadega punktides x_i. Etteantud interpolatsioonitingimuste tõttu on interpolant sõlmedes x_i pidev.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele ($n \to \infty$), kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

ning igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$ valime sõlmed

$$x_i = y_{i,0} < y_{i,1} < \ldots < y_{i,l} = x_{i+1}.$$

Olgu sõlmedes $y_{i,j}$ antud funktsiooni väärtused $f(y_{i,j})$. Igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi $\Phi(y_{i,j}) = f(y_{i,j})$.
Nii saame tükiti polünomiaalse funktsiooni $\Phi(x)$ liitekohtadega punktides x_i. Etteantud interpolatsioonitingimuste tõttu on interpolant sõlmedes x_i pidev.

Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.
Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.

Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.
Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Splainid

Olgu lõik $[a, b]$ jagatud osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$$

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:

1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Rakendustes kasutatakse tavaliselt kuupsplaine siledusastmega 2, mida tähistatakse $S^{3,2}(x)$.

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Splainid

Olgu lõik $[a, b]$ jagatud osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$$

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:
1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Rakendustes kasutatakse tavaliselt kuupsplaine siledusastmega 2, mida tähistatakse $S^{3,2}(x)$.

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Splainid

Olgu lõik $[a, b]$ jagatud osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$$

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:

1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Rakendustes kasutatakse tavaliselt kuupsplaine siledusastmega 2, mida tähistatakse $S^{3,2}(x)$.

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Splainid

Olgu lõik $[a, b]$ jagatud osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$$

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:
1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Rakendustes kasutatakse tavaliselt kuupsplaine siledusastmega 2, mida tähistatakse $S^{3,2}(x)$.

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Splainid

Olgu lõik $[a, b]$ jagatud osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$$

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:
1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Rakendustes kasutatakse tavaliselt kuupsplaine siledusastmega 2, mida tähistatakse $S^{3,2}(x)$.
Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Splainid

Olgu lõik $[a, b]$ jagatud osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$$

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:
1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.
Rakendustes kasutatakse tavaliselt kuupsplaine siledusastmega 2, mida tähistatakse $S^{3,2}(x)$.
Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1;1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0;1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1;1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0;1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1;1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0;1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.
Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2;-1] \\ 1+3(x+1)+3(x+1)^2-3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0;1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1;2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada *B*-splainide lineaarkombinatsioonina.

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.
Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2;-1] \\ 1+3(x+1)+3(x+1)^2-3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0;1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1;2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada B-splainide lineaarkombinatsioonina.

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.
Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2;-1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0;1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1;2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada *B*-splainide lineaarkombinatsioonina.