Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks.**

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse **diferentsvalemiteks.**
Diferentsvalem sammuga ette:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.
Diferentsvalem sammuga taha:

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse **diferentsvalemiteks.**

Diferentsvalem sammuga ette:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.

Diferentsvalem sammuga taha:

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse **diferentsvalemiteks.**

Diferentsvalem sammuga ette:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.

Diferentsvalem sammuga taha:

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse **diferentsvalemiteks.**
Diferentsvalem sammuga ette:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.
Diferentsvalem sammuga taha:

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse **diferentsvalemiteks.**

Diferentsvalem sammuga ette:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.

Diferentsvalem sammuga taha:

$$f'(a) \approx \frac{f(a)-f(a-h)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.

Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse **diferentsvalemiteks.**
Diferentsvalem sammuga ette:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.
Diferentsvalem sammuga taha:

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h.

Keskmistatud diferentsvalem:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2. Diferentsvalem teist järku tuletise arvutamiseks:

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Keskmistatud diferentsvalem:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2.
Diferentsvalem teist järku tuletise arvutamiseks:

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Keskmistatud diferentsvalem:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h},$$

kus $h > 0$. Kui $f''(x)$ on tõkestatud, siis viga on suurusjärku h^2. Diferentsvalem teist järku tuletise arvutamiseks:

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Valem on teist järku täpsusega.

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Integraali $\int_a^b f(x)dx$ ligikaudse arvutamise valemeid nimetatakse **kvadratuurvalemiteks.**

Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.Lõigu $[a, b]$ tükelduse $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ korral on integraalsumma defineeritud

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ühtlase võrgu korral

$$S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(p_i).$$

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Integraali $\int_a^b f(x)dx$ ligikaudse arvutamise valemeid nimetatakse **kvadratuurvalemiteks.**

Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.Lõigu $[a, b]$ tükelduse $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ korral on integraalsumma defineeritud

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ühtlase võrgu korral

$$S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(p_i).$$

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Integraali $\int_a^b f(x)dx$ ligikaudse arvutamise valemeid nimetatakse **kvadratuurvalemiteks.**

Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega. Lõigu $[a, b]$ tükelduse $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ korral on integraalsumma defineeritud

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ühtlase võrgu korral

$$S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(p_i).$$

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Integraali $\int_a^b f(x)dx$ ligikaudse arvutamise valemeid nimetatakse **kvadratuurvalemiteks.**

Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.Lõigu $[a, b]$ tükelduse $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ korral on integraalsumma defineeritud

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ühtlase võrgu korral

$$S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(p_i).$$

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Integraali $\int_a^b f(x)dx$ ligikaudse arvutamise valemeid nimetatakse **kvadratuurvalemiteks.**

Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega.Lõigu $[a, b]$ tükelduse $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ korral on integraalsumma defineeritud

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ühtlase võrgu korral

$$S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(p_i).$$

Siit

$$S_n = h \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Tegu on **ristkülikvalemiga**, valem on esimest järku täpsusega.