

# Interpoleerimine splineidega

## Definitsioon

*$l$ -järku splineiks siledusastmega  $p$  nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni  $S^{l,p}(x)$ :*

- 1.  $S^{l,p}(x)$  on ülimalt  $l$ -astme polünoom igal osalõigul  $[x_i; x_{i+1}]$ ;*
- 2.  $S^{l,p}(x)$  ise ja tema tuletised kuni järguni  $p$  (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus  $(a; b)$ .*

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplineide ehk B-splineide abil.

# Interpoleerimine splineidega

## Definitsioon

*$l$ -järku splineiks siledusastmega  $p$  nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni  $S^{l,p}(x)$ :*

- $S^{l,p}(x)$  on ülimalt  $l$ -astme polünoom igal osalõigul  $[x_i; x_{i+1}]$ ;*
- $S^{l,p}(x)$  ise ja tema tuletised kuni järguni  $p$  (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus  $(a; b)$ .*

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplaine ehk B-splaine abil.

# Interpoleerimine splineidega

## Definitsioon

*$l$ -järku splineiks siledusastmega  $p$  nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni  $S^{l,p}(x)$ :*

- 1.  $S^{l,p}(x)$  on ülimalt  $l$ -astme polünoom igal osalõigul  $[x_i; x_{i+1}]$ ;*
- 2.  $S^{l,p}(x)$  ise ja tema tuletised kuni järguni  $p$  (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus  $(a; b)$ .*

Kõige lihtsam on splineid esitada baasisplineide ehk B-splineide abil.

# Interpoleerimine splineidega

## Definitsioon

*$l$ -järku splineiks siledusastmega  $p$  nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni  $S^{l,p}(x)$ :*

- 1.  $S^{l,p}(x)$  on ülimalt  $l$ -astme polünoom igal osalõigul  $[x_i; x_{i+1}]$ ;*
- 2.  $S^{l,p}(x)$  ise ja tema tuletised kuni järguni  $p$  (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus  $(a; b)$ .*

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplineide ehk B-splineide abil.

# Interpoleerimine splineidega

## Definitsioon

*$l$ -järku splineiks siledusastmega  $p$  nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni  $S^{l,p}(x)$ :*

- 1.  $S^{l,p}(x)$  on ülimalt  $l$ -astme polünoom igal osalõigul  $[x_i; x_{i+1}]$ ;*
- 2.  $S^{l,p}(x)$  ise ja tema tuletised kuni järguni  $p$  (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus  $(a; b)$ .*

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplineide ehk B-splineide abil.

Linearsplainid  $S^{1,0}(x)$ .

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^k c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus  $c_0, c_1, \dots, c_k$  on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$  on spline, mis  $[-1; 1]$  erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Linearsplainid  $S^{1,0}(x)$ .

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^k c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus  $c_0, c_1, \dots, c_k$  on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$  on spline, mis  $[-1; 1]$  erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Linearsplainid  $S^{1,0}(x)$ .

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^k c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus  $c_0, c_1, \dots, c_k$  on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$  on spline, mis  $[-1; 1]$  erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$



Linearsplainid  $S^{1,0}(x)$ .

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^k c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus  $c_0, c_1, \dots, c_k$  on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$  on spline, mis  $[-1; 1]$  erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

*Kuupsplainid*  $S^{3,2}(x)$ .

Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on  $[x_{i-2}; x_{i+2}]$ . Baasisplain  $B^{3,2}(x)$  on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2; -1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1; 2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada  $B$ -splainide lineaarkombinatsioonina.

*Kuupsplainid*  $S^{3,2}(x)$ .

Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on  $[x_{i-2}; x_{i+2}]$ . Baasisplain  $B^{3,2}(x)$  on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2; -1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1; 2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada  $B$ -splainide lineaarkombinatsioonina.

Kuupsplainid  $S^{3,2}(x)$ .

Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on  $[x_{i-2}; x_{i+2}]$ . Baasisplain  $B^{3,2}(x)$  on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2; -1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1; 2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada  $B$ -splainide lineaarkombinatsioonina.

Kuupsplainid  $S^{3,2}(x)$ .

Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on  $[x_{i-2}; x_{i+2}]$ . Baasisplain  $B^{3,2}(x)$  on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2; -1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1; 2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada  $B$ -splainide lineaarkombinatsioonina.

# Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud  $[a, b]$  nii, et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ja sõlmedes on teada  $f(x_j)$ , kus  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni  $\Phi(x)$ , mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni  $f(x)$ . Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon  $\Phi(x)$ , mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni  $f(x)$  väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus  $\kappa_i > 0$  on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide  $f(x)$  ja  $\Phi(x)$  kokkulangevust. Suurust  $J(\Phi)$  nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

# Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud  $[a, b]$  nii, et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ja sõlmedes on teada  $f(x_j)$ , kus  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni  $\Phi(x)$ , mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni  $f(x)$ . Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon  $\Phi(x)$ , mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni  $f(x)$  väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus  $\kappa_i > 0$  on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide  $f(x)$  ja  $\Phi(x)$  kokkulangevust. Suurust  $J(\Phi)$  nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

# Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud  $[a, b]$  nii, et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ja sõlmedes on teada  $f(x_j)$ , kus  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni  $\Phi(x)$ , mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni  $f(x)$ . Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon  $\Phi(x)$ , mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni  $f(x)$  väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus  $\kappa_i > 0$  on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide  $f(x)$  ja  $\Phi(x)$  kokkulangevust. Suurust  $J(\Phi)$  nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.



# Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud  $[a, b]$  nii, et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ja sõlmedes on teada  $f(x_j)$ , kus  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni  $\Phi(x)$ , mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni  $f(x)$ . Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon  $\Phi(x)$ , mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni  $f(x)$  väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus  $\kappa_i > 0$  on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide  $f(x)$  ja  $\Phi(x)$  kokkulangevust. Suurust  $J(\Phi)$  nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

# Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud  $[a, b]$  nii, et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ja sõlmedes on teada  $f(x_j)$ , kus  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni  $\Phi(x)$ , mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni  $f(x)$ . Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon  $\Phi(x)$ , mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni  $f(x)$  väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus  $\kappa_i > 0$  on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide  $f(x)$  ja  $\Phi(x)$  kokkulangevust. Suurust  $J(\Phi)$  nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

# Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud  $[a, b]$  nii, et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ja sõlmedes on teada  $f(x_j)$ , kus  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni  $\Phi(x)$ , mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni  $f(x)$ . Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon  $\Phi(x)$ , mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni  $f(x)$  väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus  $\kappa_i > 0$  on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide  $f(x)$  ja  $\Phi(x)$  kokkulangevust. Suurust  $J(\Phi)$  nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

## Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud  $[a, b]$  nii, et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ja sõlmedes on teada  $f(x_j)$ , kus  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni  $\Phi(x)$ , mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni  $f(x)$ . Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon  $\Phi(x)$ , mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni  $f(x)$  väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus  $\kappa_i > 0$  on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide  $f(x)$  ja  $\Phi(x)$  kokkulangevust. Suurust  $J(\Phi)$  nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui  $J(\Phi) = 0$ , siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus  $c_1, c_2, \dots, c_m$  on konstandid,  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$  on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni  $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$  miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad  $c_1, c_2, \dots, c_m$  saab määrata  $m \times m$  lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$

Kui  $J(\Phi) = 0$ , siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus  $c_1, c_2, \dots, c_m$  on konstandid,  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$  on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni  $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$  miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad  $c_1, c_2, \dots, c_m$  saab määrata  $m \times m$  lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$

Kui  $J(\Phi) = 0$ , siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus  $c_1, c_2, \dots, c_m$  on konstandid,  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$  on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni  $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$  miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad  $c_1, c_2, \dots, c_m$  saab määrata  $m \times m$  lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$

Kui  $J(\Phi) = 0$ , siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus  $c_1, c_2, \dots, c_m$  on konstandid,  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$  on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni  $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$  miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad  $c_1, c_2, \dots, c_m$  saab määrata  $m \times m$  lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$



Kui  $J(\Phi) = 0$ , siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus  $c_1, c_2, \dots, c_m$  on konstandid,  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$  on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni  $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$  miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad  $c_1, c_2, \dots, c_m$  saab määrata  $m \times m$  lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$

Kui  $J(\Phi) = 0$ , siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus  $c_1, c_2, \dots, c_m$  on konstandid,  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$  on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni  $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$  miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad  $c_1, c_2, \dots, c_m$  saab määrata  $m \times m$  lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$