Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, mida nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n + 1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, mida nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, mida nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n + 1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, mida nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.**

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.**

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Diferentssuhe

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab $m-$järku diferentssuhte esitada $m-1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) - f(x_i, \ldots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Diferentssuhe

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab $m-$järku diferentssuhte esitada $m-1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Diferentssuhe

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab $m-$järku diferentssuhte esitada $m - 1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) - f(x_i, \ldots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Diferentssuhe

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab $m-$järku diferentssuhte esitada $m-1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) - f(x_i, \ldots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Newtoni interpolatsioonipolünoom

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}),$$

kus $f(x_0, x_1)$ on I järku diferentssuhe, $f(x_0, x_1, x_2)$ on II järku diferentssuhe, jne, nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks**.

$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

Seega kehtib ka

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1}.$$

Newtoni interpolatsioonipolünoom

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

kus $f(x_0, x_1)$ on I järku diferentssuhe, $f(x_0, x_1, x_2)$ on II järku diferentssuhe, jne, nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks**.

$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

Seega kehtib ka

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1}.$$

Newtoni interpolatsioonipolünoom

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}),$$

kus $f(x_0, x_1)$ on I järku diferentssuhe, $f(x_0, x_1, x_2)$ on II järku diferentssuhe, jne, nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks.**

$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

Seega kehtib ka

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1}.$$

Newtoni interpolatsioonipolünoom

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}),$$

kus $f(x_0, x_1)$ on I järku diferentssuhe, $f(x_0, x_1, x_2)$ on II järku diferentssuhe, jne, nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks.**
$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.
Seega kehtib ka

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1}.$$

Hermite' interpolatsioonipolünoom

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja olgu teada $f(x_j)$ ning $f'(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Sellisel juhul on võimalik leida funktsioon $\Phi(x)$ nii, et

$$\Phi(x_j) = f(x_j),$$

ja

$$\Phi'(x_j) = f'(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ülimalt $2n + 1$ astme polünoom, mis neid tingimusi rahuldab, on kujul

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(x) f(x_i) + \tilde{h}_i(x) f'(x_i) \right],$$

kus

$$h_i(x) = \left[1 - 2L'_{n,i}(x_i)(x - x_i)\right] [L_{n,i}(x)]^2,$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[L_{n,i}(x)]^2,$$

Hermite' interpolatsioonipolünoom

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja olgu teada $f(x_j)$ ning $f'(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Sellisel juhul on võimalik leida funktsioon $\Phi(x)$ nii, et

$$\Phi(x_j) = f(x_j),$$

ja

$$\Phi'(x_j) = f'(x_j), \ \ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ülimalt $2n + 1$ astme polünoom, mis neid tingimusi rahuldab, on kujul

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(x) f(x_i) + \tilde{h}_i(x) f'(x_i) \right],$$

kus

$$h_i(x) = \left[1 - 2L'_{n,i}(x_i)(x - x_i)\right] [L_{n,i}(x)]^2,$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[L_{n,i}(x)]^2,$$

Hermite' interpolatsioonipolünoom

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja olgu teada $f(x_j)$ ning $f'(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Sellisel juhul on võimalik leida funktsioon $\Phi(x)$ nii, et

$$\Phi(x_j) = f(x_j),$$

ja

$$\Phi'(x_j) = f'(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ülimalt $2n + 1$ astme polünoom, mis neid tingimusi rahuldab, on kujul

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(x) f(x_i) + \tilde{h}_i(x) f'(x_i) \right],$$

kus

$$h_i(x) = \left[1 - 2L'_{n,i}(x_i)(x - x_i)\right] [L_{n,i}(x)]^2,$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[L_{n,i}(x)]^2,$$

Hermite' interpolatsioonipolünoom

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja olgu teada $f(x_j)$ ning $f'(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Sellisel juhul on võimalik leida funktsioon $\Phi(x)$ nii, et

$$\Phi(x_j) = f(x_j),$$

ja

$$\Phi'(x_j) = f'(x_j), \ \ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ülimalt $2n + 1$ astme polünoom, mis neid tingimusi rahuldab, on kujul

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(x) f(x_i) + \tilde{h}_i(x) f'(x_i) \right],$$

kus

$$h_i(x) = \left[1 - 2L'_{n,i}(x_i)(x - x_i)\right] \left[L_{n,i}(x)\right]^2,$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[L_{n,i}(x)]^2,$$

Hermite' interpolatsioonipolünoom

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja olgu teada $f(x_j)$ ning $f'(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Sellisel juhul on võimalik leida funktsioon $\Phi(x)$ nii, et

$$\Phi(x_j) = f(x_j),$$

ja

$$\Phi'(x_j) = f'(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ülimalt $2n + 1$ astme polünoom, mis neid tingimusi rahuldab, on kujul

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(x) f(x_i) + \tilde{h}_i(x) f'(x_i) \right],$$

kus

$$h_i(x) = \left[1 - 2L'_{n,i}(x_i)(x - x_i)\right] \left[L_{n,i}(x)\right]^2,$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[L_{n,i}(x)]^2,$$

Hermite' interpolatsioonipolünoom

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja olgu teada $f(x_j)$ ning $f'(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Sellisel juhul on võimalik leida funktsioon $\Phi(x)$ nii, et

$$\Phi(x_j) = f(x_j),$$

ja

$$\Phi'(x_j) = f'(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ülimalt $2n + 1$ astme polünoom, mis neid tingimusi rahuldab, on kujul

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(x) f(x_i) + \tilde{h}_i(x) f'(x_i) \right],$$

kus

$$h_i(x) = \left[1 - 2L'_{n,i}(x_i)(x - x_i) \right] [L_{n,i}(x)]^2,$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[L_{n,i}(x)]^2,$$

Hermite' interpolatsioonipolünoom

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja olgu teada $f(x_j)$ ning $f'(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Sellisel juhul on võimalik leida funktsioon $\Phi(x)$ nii, et

$$\Phi(x_j) = f(x_j),$$

ja

$$\Phi'(x_j) = f'(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ülimalt $2n + 1$ astme polünoom, mis neid tingimusi rahuldab, on kujul

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(x) f(x_i) + \tilde{h}_i(x) f'(x_i) \right],$$

kus

$$h_i(x) = \left[1 - 2L'_{n,i}(x_i)(x - x_i) \right] [L_{n,i}(x)]^2,$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[L_{n,i}(x)]^2,$$

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi $H(x)$ nimetatakse Hermite'i polünoomiks.

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi $H(x)$ nimetatakse Hermite'i polünoomiks.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele, kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.
Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele, kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \le Ch^{l+1} \to 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.
Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele, kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \ \text{kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.
Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele, kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \ \text{kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.
Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele, kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \ \text{kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.

Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele, kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.

Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele, kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.
Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Interpoleerimine splainidega

Definitsioon

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:
1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Interpoleerimine splainidega

Definitsioon

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:

1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;

2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Interpoleerimine splainidega

Definitsioon

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$*:*

1. $S^{l,p}(x)$ *on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul* $[x_i; x_{i+1}]$;

2. $S^{l,p}(x)$ *ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus* $(a; b)$.

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Interpoleerimine splainidega

Definitsioon

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:
1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Interpoleerimine splainidega

Definitsioon

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:
1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1; 1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1; 1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1;1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0;1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1;1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0;1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.

Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2;-1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui} x \in [-1;0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui} x \in [0;1] \\ (2-x)^3, & \text{kui} x \in [1;2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada B-splainide lineaarkombinatsioonina.

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.

Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, \ \text{kui } x \in [-2;-1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, \ \text{kui} x \in [-1;0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, \ \text{kui} x \in [0;1] \\ (2-x)^3, \ \text{kui} x \in [1;2] \\ 0, \ \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada *B*-splainide lineaarkombinatsioonina.

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.
Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, \text{ kui } x \in [-2;-1] \\ 1+3(x+1)+3(x+1)^2-3(x+1)^3, \text{ kui} x \in [-1;0] \\ 1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3, \text{ kui} x \in [0;1] \\ (2-x)^3, \text{ kui} x \in [1;2] \\ 0, \text{ mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada B-splainide lineaarkombinatsioonina.

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.
Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, \ \text{kui } x \in [-2;-1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, \ \text{kui} x \in [-1;0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, \ \text{kui} x \in [0;1] \\ (2-x)^3, \ \text{kui} x \in [1;2] \\ 0, \ \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada *B*-splainide lineaarkombinatsioonina.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Tavalises interpolatsiooniülesandes otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks**.

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Funktsiooni $J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m.$$