Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \ \ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \ \ j = 0, 1, \ldots, n, \ \ i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n + 1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.**

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.**

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.
Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.
Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks
1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n$.
Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.
Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks
1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.
Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.
Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks
1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)}E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.
Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.
Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks
1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a,b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a,b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)!E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \dots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x-x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h)\dots(x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x-x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.

Meil

$$w_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) =$$

$$= (x_0+th-x_0)(x_0+th-x_0-h)(x_0+th-x_0-2h)\dots(x_0+th-x_0-nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h)\dots(x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit
$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$
ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x-x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil
$$w_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) =$$
$$= (x_0+th-x_0)(x_0+th-x_0-h)(x_0+th-x_0-2h)\dots(x_0+th-x_0-nh) =$$
$$= t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}.$$
$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h)\dots(x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit
$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$
ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x-x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil
$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) =$$
$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h)\dots(x_0 + th - x_0 - nh) =$$
$$= t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}.$$
$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Et

$$\left|\frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!}\right| \le 1, \ \ \forall t \in [0,n]$$

siis

$$E_n(x) \le |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1}.$$

Et

$$\left|\frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!}\right| \leq 1, \ \ \forall t \in [0, n]$$

siis

$$E_n(x) \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1}.$$

Diferentssuhe

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab $m-$järku diferentssuhte esitada $m - 1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Diferentssuhe

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab $m-$järku diferentssuhte esitada $m - 1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) - f(x_i, \ldots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Diferentssuhe

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab $m-$järku diferentssuhte esitada $m-1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) - f(x_i, \ldots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Diferentssuhe

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab $m-$järku diferentssuhte esitada $m-1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}) - f(x_i, \ldots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks.**

$n+1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks.**
$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks.**
$n+1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.