

# Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul  $[a, b]$   $n + 1$  punkti  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni  $f(x)$  väärtused neis sõlmedes  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Kui funktsiooni  $f(x)$  väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon  $\Phi(x)$  nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots$$

# Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul  $[a, b]$   $n + 1$  punkti  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni  $f(x)$  väärtused neis sõlmedes  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Kui funktsiooni  $f(x)$  väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon  $\Phi(x)$  nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots$$

# Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul  $[a, b]$   $n + 1$  punkti  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni  $f(x)$  väärtused neis sõlmedes  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Kui funktsiooni  $f(x)$  väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon  $\Phi(x)$  nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots$$

# Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul  $[a, b]$   $n + 1$  punkti  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni  $f(x)$  väärtused neis sõlmedes

$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Kui funktsiooni  $f(x)$  väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon  $\Phi(x)$  nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots$$

# Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul  $[a, b]$   $n + 1$  punkti  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni  $f(x)$  väärtused neis sõlmedes  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Kui funktsiooni  $f(x)$  väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon  $\Phi(x)$  nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots$$

# Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul  $[a, b]$   $n + 1$  punkti  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni  $f(x)$  väärtused neis sõlmedes  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Kui funktsiooni  $f(x)$  väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon  $\Phi(x)$  nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots$$

Leidub parajasti üks ülimalt  $n$ -astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x)f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks**.

Leidub parajasti üks ülimalt  $n$ -astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x)f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks**.



Interpoleerimisviga  $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$ . Sõlmedes  $E_n(x_j) = 0$ ,  
 $j = 0, 1, \dots, n$ .

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus  $h = x_j - x_{j-1}$  on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus  $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ . Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus  $t \in [a, b]$ . On ilmne, et  $G_t(x_j) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Interpoleerimisviga  $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$ . Sõlmedes  $E_n(x_j) = 0$ ,  
 $j = 0, 1, \dots, n$ .

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus  $h = x_j - x_{j-1}$  on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus  $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ . Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus  $t \in [a, b]$ . On ilmne, et  $G_t(x_j) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Interpoleerimisviga  $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$ . Sõlmedes  $E_n(x_j) = 0$ ,  
 $j = 0, 1, \dots, n$ .

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus  $h = x_j - x_{j-1}$  on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus  $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ . Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus  $t \in [a, b]$ . On ilmne, et  $G_t(x_j) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Interpoleerimisviga  $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$ . Sõlmedes  $E_n(x_j) = 0$ ,  
 $j = 0, 1, \dots, n$ .

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus  $h = x_j - x_{j-1}$  on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus  $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ . Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus  $t \in [a, b]$ . On ilmne, et  $G_t(x_j) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Interpoleerimisviga  $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$ . Sõlmedes  $E_n(x_j) = 0$ ,  
 $j = 0, 1, \dots, n$ .

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus  $h = x_j - x_{j-1}$  on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus  $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ . Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus  $t \in [a, b]$ . On ilmne, et  $G_t(x_j) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Interpoleerimisviga  $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$ . Sõlmedes  $E_n(x_j) = 0$ ,  
 $j = 0, 1, \dots, n$ .

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus  $h = x_j - x_{j-1}$  on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus  $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ . Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus  $t \in [a, b]$ . On ilmne, et  $G_t(x_j) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Interpoleerimisviga  $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$ . Sõlmedes  $E_n(x_j) = 0$ ,  
 $j = 0, 1, \dots, n$ .

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus  $h = x_j - x_{j-1}$  on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus  $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ . Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus  $t \in [a, b]$ . On ilmne, et  $G_t(x_j) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskväertusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväertusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .



Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskväertusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväertusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .

Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .

Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskvaartusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskvaartusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .

Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskväertusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväertusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .

Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskvaartusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskvaartusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .

Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskväertusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväertusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .

Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskväertusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväertusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .

Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskväertusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväertusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .



Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskvärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskvärtusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .

Samas  $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$ . Kui  $t \neq x_j$ , on funktsioonil  $G_t(x)$   $n + 2$  erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ja  $t$ . Rolle'i keskväertusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus  $G_t'(x) = 0$ . Järelikult on funktsioonil  $G_t'(x)$  lõigul  $n + 1$  erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväertusteoreemi, saame, et funktsioonil  $G_t''(x)$  veel on lõigul  $[a, b]$   $n$  erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon  $G_t^{(n+1)}(x)$  omab lõigul  $[a, b]$  vähemalt üht nullkohta  $\xi$ , st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame  $G_t^{(n+1)}(x)$ .

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et  $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$ , siis  $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$ .

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui  $t = x$ , siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st  $x_j = x_0 + jh$ ). Tähistame  $t = \frac{x-x_0}{h}$ , siis  $x = x_0 + th$ .

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui  $t = x$ , siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st  $x_j = x_0 + jh$ ). Tähistame  $t = \frac{x-x_0}{h}$ , siis  $x = x_0 + th$ .

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui  $t = x$ , siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st  $x_j = x_0 + jh$ ). Tähistame  $t = \frac{x-x_0}{h}$ ,  
siis  $x = x_0 + th$ .

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui  $t = x$ , siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st  $x_j = x_0 + jh$ ). Tähistame  $t = \frac{x-x_0}{h}$ ,  
siis  $x = x_0 + th$ .

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui  $t = x$ , siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st  $x_j = x_0 + jh$ ). Tähistame  $t = \frac{x-x_0}{h}$ ,  
siis  $x = x_0 + th$ .

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui  $t = x$ , siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st  $x_j = x_0 + jh$ ). Tähistame  $t = \frac{x-x_0}{h}$ ,  
siis  $x = x_0 + th$ .

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$



Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui  $t = x$ , siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st  $x_j = x_0 + jh$ ). Tähistame  $t = \frac{x-x_0}{h}$ ,  
siis  $x = x_0 + th$ .

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui  $t = x$ , siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st  $x_j = x_0 + jh$ ). Tähistame  $t = \frac{x-x_0}{h}$ , siis  $x = x_0 + th$ .

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)(t-2) \dots (t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Et

$$\left| \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!} \right| \leq 1, \quad \forall t \in [0, n]$$

siis

$$E_n(x) \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1}.$$

Et

$$\left| \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!} \right| \leq 1, \quad \forall t \in [0, n]$$

siis

$$E_n(x) \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1}.$$

# Diferentssuhe

Funktsiooni  $f(x)$  esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni  $f(x)$  teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab  $m$ -järku diferentssuhte esitada  $m - 1$ -järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

# Diferentssuhte

Funktsiooni  $f(x)$  esimest järku diferentssuhte

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni  $f(x)$  teist järku diferentssuhte

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab  $m$ -järku diferentssuhte esitada  $m - 1$ -järku diferentssuhte kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

# Diferentssuhe

Funktsiooni  $f(x)$  esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni  $f(x)$  teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab  $m$ -järku diferentssuhte esitada  $m - 1$ -järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

# Diferentssuhe

Funktsiooni  $f(x)$  esimest järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni  $f(x)$  teist järku diferentssuhe

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Üldiselt saab  $m$ -järku diferentssuhte esitada  $m - 1$ -järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$



## Polünoomi

$$\begin{aligned}\Phi(x) = & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\end{aligned}$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks**.

$n + 1$  sõlme jaoks saab leida ainult ühe  $n$ -astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

## Polünoomi

$$\begin{aligned}\Phi(x) = & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\end{aligned}$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks**.

$n + 1$  sõlme jaoks saab leida ainult ühe  $n$ -astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

## Polünoomi

$$\begin{aligned}\Phi(x) = & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\end{aligned}$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks**.

$n + 1$  sõlme jaoks saab leida ainult ühe  $n$ -astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.