Ekstreemumülesannete lahendamine

Vaatame m-muutuja funktsioon $f(x)$, mille argumendiks on $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$ ning vaja on leida selle funktsiooni maksimum või miinimum. Funktsiooni miinimumi leidmiseks saab kasutada iteratiivseid meetodeid, mille korral liigutakse järk-järgult miinimumpunkti poole funktsiooni kahanemise suunas. Olgu algähend $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_m^0) \in R^m$ ja arvutame funktsiooni $f(x)$ gradiendi punktis x^0:

$$v^0 = \mathrm{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^0); \ldots; \frac{\partial}{\partial x_m} f(x^0) \right).$$

Ekstreemumülesannete lahendamine

Vaatame m-muutuja funktsioon $f(x)$, mille argumendiks on $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$ ning vaja on leida selle funktsiooni maksimum või miinimum. Funktsiooni miinimumi leidmiseks saab kasutada iteratiivseid meetodeid, mille korral liigutakse järk-järgult miinimumpunkti poole funktsiooni kahanemise suunas. Olgu algähend $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_m^0) \in R^m$ ja arvutame funktsiooni $f(x)$ gradiendi punktis x^0:

$$v^0 = \mathrm{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^0); \ldots; \frac{\partial}{\partial x_m} f(x^0) \right).$$

Ekstreemumülesannete lahendamine

Vaatame m-muutuja funktsioon $f(x)$, mille argumendiks on $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$ ning vaja on leida selle funktsiooni maksimum või miinimum. Funktsiooni miinimumi leidmiseks saab kasutada iteratiivseid meetodeid, mille korral liigutakse järk-järgult miinimumpunkti poole funktsiooni kahanemise suunas. Olgu algähend $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_m^0) \in R^m$ ja arvutame funktsiooni $f(x)$ gradiendi punktis x^0:

$$v^0 = \mathrm{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^0); \ldots; \frac{\partial}{\partial x_m} f(x^0) \right).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1} v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1}v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1} v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**.

Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1}v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1} v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1} v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Kiireima languse meetod ruutfunktsiooni korral

Olgu $f(x)$ ruutfunktsioon, st

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \gamma,$$

kus $\alpha_{i,j}$, β_i ja γ on konstandid.
Olgu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

sümmeetriline, st $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.
Ruutfunktsiooni saab lühemalt kirjutada kujule

$$f(x) = Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma.$$

Kiireima languse meetod ruutfunktsiooni korral

Olgu $f(x)$ ruutfunktsioon, st

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \gamma,$$

kus $\alpha_{i,j}$, β_i ja γ on konstandid.
Olgu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

sümmeetriline, st $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.
Ruutfunktsiooni saab lühemalt kirjutada kujule

$$f(x) = Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma.$$

Kiireima languse meetod ruutfunktsiooni korral

Olgu $f(x)$ ruutfunktsioon, st

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \gamma,$$

kus $\alpha_{i,j}$, β_i ja γ on konstandid.
Olgu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

sümmeetriline, st $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.
Ruutfunktsiooni saab lühemalt kirjutada kujule

$$f(x) = Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma.$$

Kiireima languse meetod ruutfunktsiooni korral

Olgu $f(x)$ ruutfunktsioon, st

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \gamma,$$

kus $\alpha_{i,j}$, β_i ja γ on konstandid.
Olgu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

sümmeetriline, st $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.
Ruutfunktsiooni saab lühemalt kirjutada kujule

$$f(x) = Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma.$$

Miinimumi leidumiseks

$$Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma \right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i + \beta_k = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k}) x_i + \beta_k.$$

Miinimumi leidumiseks

$$Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma \right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i + \beta_k = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k}) x_i + \beta_k.$$

Miinimumi leidumiseks

$$Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma\right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i + \beta_k = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k}) x_i + \beta_k.$$

Miinimumi leidumiseks

$$Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma \right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i + \beta_k = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k}) x_i + \beta_k.$$

Miinimumi leidumiseks

$$Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma \right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i + \beta_k = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k}) x_i + \beta_k.$$

Miinimumi leidumiseks

$$Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma \right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i + \beta_k = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k}) x_i + \beta_k.$$

Sümmeetrilisusest $\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} + \alpha_{k,i} = 2\alpha_{k,i}$. Seega

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} x_i + \beta_k.$$

Järelikult

$$\mathrm{grad} f(x) = 2Ax + \beta$$

ning

$$v^{n-1} = \mathrm{grad} f(x^{n-1}) = 2Ax^{n-1} + \beta.$$

Määrame ka sammu pikkuse t. Selleks

$$f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = A(x^{n-1} - tv^{n-1}) \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \beta \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \gamma.$$

Leiame tuletise muutuja t suhtes

Sümmeetrilisusest $\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} + \alpha_{k,i} = 2\alpha_{k,i}$. Seega

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = 2 \sum_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} x_i + \beta_k.$$

Järelikult

$$\mathrm{grad} f(x) = 2Ax + \beta$$

ning

$$v^{n-1} = \mathrm{grad} f(x^{n-1}) = 2Ax^{n-1} + \beta.$$

Määrame ka sammu pikkuse t. Selleks

$$f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = A(x^{n-1} - tv^{n-1}) \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \beta \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \gamma.$$

Leiame tuletise muutuja t suhtes

Sümmeetrilisusest $\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} + \alpha_{k,i} = 2\alpha_{k,i}$. Seega

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} x_i + \beta_k.$$

Järelikult

$$\mathrm{grad} f(x) = 2Ax + \beta$$

ning

$$v^{n-1} = \mathrm{grad} f(x^{n-1}) = 2Ax^{n-1} + \beta.$$

Määrame ka sammu pikkuse t. Selleks

$$f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = A(x^{n-1} - tv^{n-1}) \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \beta \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \gamma.$$

Leiame tuletise muutuja t suhtes

Sümmeetrilisusest $\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} + \alpha_{k,i} = 2\alpha_{k,i}$. Seega

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} x_i + \beta_k.$$

Järelikult

$$\mathrm{grad} f(x) = 2Ax + \beta$$

ning

$$v^{n-1} = \mathrm{grad} f(x^{n-1}) = 2Ax^{n-1} + \beta.$$

Määrame ka sammu pikkuse t. Selleks

$$f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = A(x^{n-1} - tv^{n-1}) \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \beta \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \gamma.$$

Leiame tuletise muutuja t suhtes

Sümmeetrilisusest $\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} + \alpha_{k,i} = 2\alpha_{k,i}$. Seega

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} x_i + \beta_k.$$

Järelikult

$$\mathrm{grad} f(x) = 2Ax + \beta$$

ning

$$v^{n-1} = \mathrm{grad} f(x^{n-1}) = 2Ax^{n-1} + \beta.$$

Määrame ka sammu pikkuse t. Selleks

$$f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = A(x^{n-1} - tv^{n-1}) \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \beta \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \gamma.$$

Leiame tuletise muutuja t suhtes

Sümmeetrilisusest $\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} + \alpha_{k,i} = 2\alpha_{k,i}$. Seega

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} x_i + \beta_k.$$

Järelikult

$$\mathrm{grad} f(x) = 2Ax + \beta$$

ning

$$v^{n-1} = \mathrm{grad} f(x^{n-1}) = 2Ax^{n-1} + \beta.$$

Määrame ka sammu pikkuse t. Selleks

$$f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = A(x^{n-1} - tv^{n-1}) \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \beta \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \gamma.$$

Leiame tuletise muutuja t suhtes

$$\frac{d}{dt} f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = -Av^{n-1} \cdot x^{n-1} - Ax^{n-1} \cdot v^{n-1} + 2tAv^{n-1} \cdot v^{n-1} - \beta \cdot v^{n-1}.$$

Teadupärast saab seosest $\frac{d}{dt} f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = 0$ määrata optimaalse sammu pikkuse

$$t_{n-1} = \frac{Av^{n-1} \cdot x^{n-1} + Ax^{n-1} \cdot v^{n-1} + \beta \cdot v^{n-1}}{2Av^{n-1} \cdot v^{n-1}}.$$

$$\frac{d}{dt}f(x^{n-1}-tv^{n-1}) = -Av^{n-1}\cdot x^{n-1} - Ax^{n-1}\cdot v^{n-1} + 2tAv^{n-1}\cdot v^{n-1} - \beta\cdot v^{n-1}.$$

Teadupärast saab seosest $\frac{d}{dt}f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = 0$ määrata optimaalse sammu pikkuse

$$t_{n-1} = \frac{Av^{n-1}\cdot x^{n-1} + Ax^{n-1}\cdot v^{n-1} + \beta\cdot v^{n-1}}{2Av^{n-1}\cdot v^{n-1}}.$$

$$\frac{d}{dt}f(x^{n-1}-tv^{n-1}) = -Av^{n-1}\cdot x^{n-1}-Ax^{n-1}\cdot v^{n-1}+2tAv^{n-1}\cdot v^{n-1}-\beta\cdot v^{n-1}.$$

Teadupärast saab seosest $\frac{d}{dt}f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = 0$ määrata optimaalse sammu pikkuse

$$t_{n-1} = \frac{Av^{n-1} \cdot x^{n-1} + Ax^{n-1} \cdot v^{n-1} + \beta \cdot v^{n-1}}{2Av^{n-1} \cdot v^{n-1}}.$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n + 1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n, \;\; i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n, \;\; i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.**

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.**

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.
Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.
Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks
1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.
Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.
Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks
1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n$.
Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.
Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks
1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Interpoleerimisviga $E_n(x) = f(x) - \Phi(x)$. Sõlmedes $E_n(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Näitame selle hinnangu kehtivust. Selleks

1) kehtib

$$E_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kus $w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.Olgu

$$G_t(x) = E_n(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E_n(t),$$

kus $t \in [a, b]$. On ilmne, et $G_t(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)!E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \dots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)!E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Samas $G_t(t) = E_n(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E_n(t) = 0$. Kui $t \neq x_j$, on funktsioonil $G_t(x)$ $n+2$ erinevat nullkohta - nendeks on sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ja t. Rolle'i keskväärtusteoreemist on teada, et iga kahe järjestikuse nullkoha vahel on vähemalt üks punkt, kus $G_t'(x) = 0$. Järelikult on funktsioonil $G_t'(x)$ lõigul $n+1$ erinevat nullkohta. Kasutades taas Rolle'i keskväärtusteoreemi, saame, et funktsioonil $G_t''(x)$ veel on lõigul $[a, b]$ n erinevat nullkohta. Nii jätkates jõuame välja, et funktsioon $G_t^{(n+1)}(x)$ omab lõigul $[a, b]$ vähemalt üht nullkohta ξ, st

$$G_t^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Leiame $G_t^{(n+1)}(x)$.

$$\frac{d^{n+1}}{(dx)^{n+1}} G_t(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)}.$$

Et $G_t^{(n+1)}(\xi) = 0$, siis $f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(t)}{w_n(t)} = 0$.

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h)\dots(x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.

2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h)\dots(x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.

Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h)\dots(x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2)\dots(t-n)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \ldots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \ldots (t-n) h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2) \ldots (t-n) h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Siit

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(t)}{(n+1)!}$$

ning kui $t = x$, siis 1) on näidatud.
2) eeldame, et võrk on ühtlane (st $x_j = x_0 + jh$). Tähistame $t = \frac{x - x_0}{h}$, siis $x = x_0 + th$.
Meil

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$

$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) =$$

$$= t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}.$$

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) w_n(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2) \dots (t-n) h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Et

$$\left|\frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!}\right| \leq 1, \ \ \forall t \in [0, n]$$

siis

$$E_n(x) \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1}.$$

Et

$$\left|\frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)}{(n+1)!}\right| \leq 1, \ \ \forall t \in [0, n]$$

siis

$$E_n(x) \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1}.$$