Lineaarsete võrrandisüsteemide täpne lahendamine

Vaatleme lineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = y_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = y_m. \end{cases}$$

Sama süsteemi saab üles kirjutada ka maatrikskujul $Ax = y$, kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ ja } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Lineaarsete võrrandisüsteemide täpne lahendamine

Vaatleme lineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = y_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = y_m. \end{cases}$$

Sama süsteemi saab üles kirjutada ka maatrikskujul $Ax = y$, kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ ja } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Süsteemi $Ax = y$ lahendamiseks saab kasutada Crameri valemeid, kuid see on küllalt töömahukas ($m + 1$ determinanti).
Samuti saab süsteemi lahendada Gaussi meetodiga (lahendamiseks kulub suurusjärku $m^3 + m^2$ tehet).
Lineaarseid süsteeme saab lahendada ka **LU-dekompositsiooniga** (*LU-lahutus*).

Süsteemi $Ax = y$ lahendamiseks saab kasutada Crameri valemeid, kuid see on küllalt töömahukas ($m + 1$ determinanti).
Samuti saab süsteemi lahendada Gaussi meetodiga (lahendamiseks kulub suurusjärku $m^3 + m^2$ tehet).
Lineaarseid süsteeme saab lahendada ka **LU-dekompositsiooniga** (*LU-lahutus*).

Süsteemi $Ax = y$ lahendamiseks saab kasutada Crameri valemeid, kuid see on küllalt töömahukas ($m + 1$ determinanti).
Samuti saab süsteemi lahendada Gaussi meetodiga (lahendamiseks kulub suurusjärku $m^3 + m^2$ tehet).
Lineaarseid süsteeme saab lahendada ka **LU-dekompositsiooniga** (*LU-lahutus*).

Osutub, et maatriksit A on võimalik lahutada kahe maatriksi korrutiseks $A = LU$, kus

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mm} \end{pmatrix}$$

ja

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{mm} \end{pmatrix}$$

Kasutades dekompositsiooni $A = LU$ saab süsteemi $Ax = y$ lahendamise taandada kahe järjestikuse kolmnurkse süsteemi lahendamisele.

Osutub, et maatriksit A on võimalik lahutada kahe maatriksi korrutiseks $A = LU$, kus

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mm} \end{pmatrix}$$

ja

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{mm} \end{pmatrix}$$

Kasutades dekompositsiooni $A = LU$ saab süsteemi $Ax = y$ lahendamise taandada kahe järjestikuse kolmnurkse süsteemi lahendamisele.

Olgu $u_{ii} = 1$, siis $l_{i1} = a_{i1}$,

$$u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}},$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} \ (i \geq k),$$

$$u_{ik} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk} \right) \ (i < k).$$

LU-dekompositsioon on kasulik, kui on vaja lahendada süsteeme ühe ja sama maatriksiga A, kuid erinevate vabaliikmetega y.

Olgu $u_{ii} = 1$, siis $l_{i1} = a_{i1}$,
$$u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}},$$
$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} \ (i \geq k),$$
$$u_{ik} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk} \right) \ (i < k).$$
LU-dekompositsioon on kasulik, kui on vaja lahendada süsteeme ühe ja sama maatriksiga A, kuid erinevate vabaliikmetega y.

Olgu $u_{ii} = 1$, siis $l_{i1} = a_{i1}$,

$$u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}},$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} \ (i \geq k),$$

$$u_{ik} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk} \right) \ (i < k).$$

LU-dekompositsioon on kasulik, kui on vaja lahendada süsteeme ühe ja sama maatriksiga A, kuid erinevate vabaliikmetega y.

Olgu $u_{ii} = 1$, siis $l_{i1} = a_{i1}$,

$$u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}},$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} \ (i \geq k),$$

$$u_{ik} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk} \right) \ (i < k).$$

LU-dekompositsioon on kasulik, kui on vaja lahendada süsteeme ühe ja sama maatriksiga A, kuid erinevate vabaliikmetega y.

Olgu $u_{ii} = 1$, siis $l_{i1} = a_{i1}$,

$$u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}},$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} \ (i \geq k),$$

$$u_{ik} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk} \right) \ (i < k).$$

LU-dekompositsioon on kasulik, kui on vaja lahendada süsteeme ühe ja sama maatriksiga A, kuid erinevate vabaliikmetega y.

$n-$mõõtmelise vektori $\vec{x}$ saab kirjutada kujul

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \text{või} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektorist kõneldes peetakse tavaliselt silmas veeruvektorit. Kui kasutada transponeerimist, siis saab veeruvektorist reavektori kujul

$$\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T \qquad \text{või} \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

Vektorite $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ja $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ summa ja korrutis arvuga α esituvad

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T$$

$$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^T.$$

Vektori ja maatriksi norm

$n-$mõõtmelise vektori $\vec{x}$ saab kirjutada kujul

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \text{või} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektorist kõneldes peetakse tavaliselt silmas veeruvektorit. Kui kasutada transponeerimist, siis saab veeruvektorist reavektori kujul

$$\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T \qquad \text{või} \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

Vektorite $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ja $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ summa ja korrutis arvuga α esituvad

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T$$

$$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^T.$$

Vektori ja maatriksi norm

$n-$mõõtmelise vektori $\vec{x}$ saab kirjutada kujul

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \text{või} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektorist kõneldes peetakse tavaliselt silmas veeruvektorit. Kui kasutada transponeerimist, siis saab veeruvektorist reavektori kujul

$$\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T \qquad \text{või} \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

Vektorite $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ja $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ summa ja korrutis arvuga α esituvad

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T$$

$$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^T.$$

Definitsioon

Vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ norm on arv, mida tähistatakse sümboliga $\|\vec{x}\|$, ja mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $\|\vec{x}\| > 0$, kui $x \neq 0$ ning $\|\vec{x}\| \equiv 0$ siis ja ainult siis, kui $\vec{x} = 0$;

2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\| \ \forall\alpha$;

3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Kolmas tingimus on tuntud ka kolmnurga aksioomina.

Definitsioon

Vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ norm on arv, mida tähistatakse sümboliga $\|\vec{x}\|$, ja mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $\|\vec{x}\| > 0$, kui $x \neq 0$ ning $\|\vec{x}\| \equiv 0$ siis ja ainult siis, kui $\vec{x} = 0$;

2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|\ \forall\alpha$;

3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Kolmas tingimus on tuntud ka kolmnurga aksioomina.

Definitsioon

Vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ norm on arv, mida tähistatakse sümboliga $\|\vec{x}\|$, ja mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $\|\vec{x}\| > 0$, kui $x \neq 0$ ning $\|\vec{x}\| \equiv 0$ siis ja ainult siis, kui $\vec{x} = 0$;

2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\| \ \forall\alpha$;

3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Kolmas tingimus on tuntud ka kolmnurga aksioomina.

Definitsioon

Vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ *norm on arv, mida tähistatakse sümboliga* $\|\vec{x}\|$*, ja mis rahuldab järgmisi tingimusi:*
1. $\|\vec{x}\| > 0$*, kui* $x \neq 0$ *ning* $\|\vec{x}\| \equiv 0$ *siis ja ainult siis, kui* $\vec{x} = 0$*;*
2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\| \ \forall\alpha$*;*
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$*.*

Kolmas tingimus on tuntud ka kolmnurga aksioomina.

Definitsioon

Vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ *norm on arv, mida tähistatakse sümboliga* $\|\vec{x}\|$*, ja mis rahuldab järgmisi tingimusi:*
1. $\|\vec{x}\| > 0$, *kui* $x \neq 0$ *ning* $\|\vec{x}\| \equiv 0$ *siis ja ainult siis, kui* $\vec{x} = 0$*;*
2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\| \ \forall\alpha$*;*
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$*.*

Kolmas tingimus on tuntud ka kolmnurga aksioomina.

Enimkasutatud normid vektorruumis $\mathbb{R}^n$ on:

1. 1−norm: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;
2. m−norm: $\|\vec{x}\|_m = \max_{1\le k\le n} |x_k|$;
3. $\mathcal{L}_p$ või $\mathcal{L}^p$ norm: $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Ütleme, et vektorite jada $\vec{x_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ koondub normi järgi vektoriks $\vec{x}$ ja tähistame $\lim_{m\longrightarrow\infty} \vec{x_m} = \vec{x}$, kui $\lim_{m\longrightarrow\infty} \|\vec{x_m} - \vec{x}\| = 0$.

Vektorruumi, milles on defineeritud norm, nimetatakse normeeritud vektorruumiks ehk lihtsalt normeeritud ruumiks.

Ruumi, milles norm on defineeritud skalaarkorrutise $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ abil, nimetatakse Hilberti ruumiks ja tähistatakse tavaliselt tähega $\mathcal{H}$.

Enimkasutatud normid vektorruumis $\mathbb{R}^n$ on:

1. 1−norm: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;

2. m−norm: $\|\vec{x}\|_m = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$;

3. $\mathcal{L}_p$ või $\mathcal{L}^p$ norm: $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Ütleme, et vektorite jada $\vec{x_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ koondub normi järgi vektoriks $\vec{x}$ ja tähistame $\lim_{m \longrightarrow \infty} \vec{x_m} = \vec{x}$, kui $\lim_{m \longrightarrow \infty} \|\vec{x_m} - \vec{x}\| = 0$.

Vektorruumi, milles on defineeritud norm, nimetatakse normeeritud vektorruumiks ehk lihtsalt normeeritud ruumiks.

Ruumi, milles norm on defineeritud skalaarkorrutise $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ abil, nimetatakse Hilberti ruumiks ja tähistatakse tavaliselt tähega $\mathcal{H}$.

Enimkasutatud normid vektorruumis $\mathbb{R}^n$ on:

1. $1-$norm: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;
2. $m-$norm: $\|\vec{x}\|_m = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$;
3. $\mathcal{L}_p$ või $\mathcal{L}^p$ norm: $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Ütleme, et vektorite jada $\vec{x_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ koondub normi järgi vektoriks $\vec{x}$ ja tähistame $\lim_{m \longrightarrow \infty} \vec{x_m} = \vec{x}$, kui $\lim_{m \longrightarrow \infty} \|\vec{x_m} - \vec{x}\| = 0$.

Vektorruumi, milles on defineeritud norm, nimetatakse normeeritud vektorruumiks ehk lihtsalt normeeritud ruumiks.

Ruumi, milles norm on defineeritud skalaarkorrutise $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ abil, nimetatakse Hilberti ruumiks ja tähistatakse tavaliselt tähega $\mathcal{H}$.

Enimkasutatud normid vektorruumis $\mathbb{R}^n$ on:

1. $1-$norm: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;
2. $m-$norm: $\|\vec{x}\|_m = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$;
3. $\mathcal{L}_p$ või $\mathcal{L}^p$ norm: $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Ütleme, et vektorite jada $\vec{x_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ koondub normi järgi vektoriks $\vec{x}$ ja tähistame $\lim_{m\longrightarrow\infty} \vec{x_m} = \vec{x}$, kui $\lim_{m\longrightarrow\infty} \|\vec{x_m} - \vec{x}\| = 0$.

Vektorruumi, milles on defineeritud norm, nimetatakse normeeritud vektorruumiks ehk lihtsalt normeeritud ruumiks.

Ruumi, milles norm on defineeritud skalaarkorrutise $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ abil, nimetatakse Hilberti ruumiks ja tähistatakse tavaliselt tähega $\mathcal{H}$.

Enimkasutatud normid vektorruumis $\mathbb{R}^n$ on:

1. 1−norm: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;
2. m−norm: $\|\vec{x}\|_m = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$;
3. $\mathcal{L}_p$ või $\mathcal{L}^p$ norm: $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Ütleme, et vektorite jada $\vec{x_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ koondub normi järgi vektoriks $\vec{x}$ ja tähistame $\lim_{m \longrightarrow \infty} \vec{x_m} = \vec{x}$, kui $\lim_{m \longrightarrow \infty} \|\vec{x_m} - \vec{x}\| = 0$.

Vektorruumi, milles on defineeritud norm, nimetatakse normeeritud vektorruumiks ehk lihtsalt normeeritud ruumiks.

Ruumi, milles norm on defineeritud skalaarkorrutise $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ abil, nimetatakse Hilberti ruumiks ja tähistatakse tavaliselt tähega $\mathcal{H}$.

Enimkasutatud normid vektorruumis $\mathbb{R}^n$ on:

1. 1−norm: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;
2. m−norm: $\|\vec{x}\|_m = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$;
3. $\mathcal{L}_p$ või $\mathcal{L}^p$ norm: $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Ütleme, et vektorite jada $\vec{x_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ koondub normi järgi vektoriks $\vec{x}$ ja tähistame $\lim_{m \longrightarrow \infty} \vec{x_m} = \vec{x}$, kui $\lim_{m \longrightarrow \infty} \|\vec{x_m} - \vec{x}\| = 0$.

Vektorruumi, milles on defineeritud norm, nimetatakse normeeritud vektorruumiks ehk lihtsalt normeeritud ruumiks.

Ruumi, milles norm on defineeritud skalaarkorrutise $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ abil, nimetatakse Hilberti ruumiks ja tähistatakse tavaliselt tähega $\mathcal{H}$.

Enimkasutatud normid vektorruumis $\mathbb{R}^n$ on:

1. 1−norm: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;
2. m−norm: $\|\vec{x}\|_m = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$;
3. $\mathcal{L}_p$ või $\mathcal{L}^p$ norm: $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Ütleme, et vektorite jada $\vec{x_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ koondub normi järgi vektoriks $\vec{x}$ ja tähistame $\lim_{m\longrightarrow\infty} \vec{x_m} = \vec{x}$, kui $\lim_{m\longrightarrow\infty} \|\vec{x_m} - \vec{x}\| = 0$.

Vektorruumi, milles on defineeritud norm, nimetatakse normeeritud vektorruumiks ehk lihtsalt normeeritud ruumiks.

Ruumi, milles norm on defineeritud skalaarkorrutise $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ abil, nimetatakse Hilberti ruumiks ja tähistatakse tavaliselt tähega $\mathcal{H}$.

Definitsioon

Olgu A suvaline ristkülikmaatriks. Vähimat arvu M, mille korral võrratus

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

kehtib iga vektori x puhul, nimetatakse maatriksi A normiks ja tähistatakse $\|A\|$.

Definitsioon

Suvalise maatriksi A norm defineeritakse kui arv $\|A\|$, *mis rahuldab järgmisi tingimusi:*

1. $\|A\| > 0$, *kui* $A \neq \ominus$ *ning* $\| \ominus \| = 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$,

kus λ *on arv, B on sobivate mõõtmetega maatriks ja* $\ominus$ *on nullmaatriks.*

Definitsioon

Olgu A suvaline ristkülikmaatriks. Vähimat arvu M, mille korral võrratus

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

kehtib iga vektori x puhul, nimetatakse maatriksi A normiks ja tähistatakse $\|A\|$.

Definitsioon

Suvalise maatriksi A norm defineeritakse kui arv $\|A\|$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $\|A\| > 0$, *kui* $A \neq \ominus$ *ning* $\| \ominus \| = 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$,

kus λ on arv, B on sobivate mõõtmetega maatriks ja $\ominus$ on nullmaatriks.

Definitsioon

Olgu A suvaline ristkülikmaatriks. Vähimat arvu M, mille korral võrratus

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

kehtib iga vektori x puhul, nimetatakse maatriksi A normiks ja tähistatakse $\|A\|$.

Definitsioon

Suvalise maatriksi A norm defineeritakse kui arv $\|A\|$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $\|A\| > 0$, kui $A \neq \ominus$ ning $\| \ominus \| = 0$;

2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$;

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$,

kus λ on arv, B on sobivate mõõtmetega maatriks ja $\ominus$ on nullmaatriks.

Definitsioon

Olgu A suvaline ristkülikmaatriks. Vähimat arvu M, mille korral võrratus

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

kehtib iga vektori x puhul, nimetatakse maatriksi A normiks ja tähistatakse $\|A\|$.

Definitsioon

Suvalise maatriksi A norm defineeritakse kui arv $\|A\|$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $\|A\| > 0$, kui $A \neq \ominus$ ning $\| \ominus \| = 0$;

2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$;

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$,

kus λ on arv, B on sobivate mõõtmetega maatriks ja $\ominus$ on nullmaatriks.

Definitsioon

Olgu A suvaline ristkülikmaatriks. Vähimat arvu M, mille korral võrratus

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

kehtib iga vektori x puhul, nimetatakse maatriksi A normiks ja tähistatakse $\|A\|$.

Definitsioon

Suvalise maatriksi A norm defineeritakse kui arv $\|A\|$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $\|A\| > 0$, *kui* $A \neq \ominus$ *ning* $\| \ominus \| = 0$;

2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$,

kus λ on arv, B on sobivate mõõtmetega maatriks ja $\ominus$ on nullmaatriks.

Definitsioon

Olgu A suvaline ristkülikmaatriks. Vähimat arvu M, mille korral võrratus

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

kehtib iga vektori x puhul, nimetatakse maatriksi A normiks ja tähistatakse $\|A\|$.

Definitsioon

Suvalise maatriksi A norm defineeritakse kui arv $\|A\|$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $\|A\| > 0$, *kui* $A \neq \ominus$ *ning* $\| \ominus \| = 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$,

kus λ on arv, B on sobivate mõõtmetega maatriks ja $\ominus$ on nullmaatriks.

Definitsioon

Olgu A suvaline ristkülikmaatriks. Vähimat arvu M, mille korral võrratus

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

kehtib iga vektori x puhul, nimetatakse maatriksi A normiks ja tähistatakse $\|A\|$.

Definitsioon

Suvalise maatriksi A norm defineeritakse kui arv $\|A\|$, *mis rahuldab järgmisi tingimusi:*

1. $\|A\| > 0$, *kui* $A \neq \ominus$ *ning* $\| \ominus \| = 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$,

kus λ *on arv, B on sobivate mõõtmetega maatriks ja* $\ominus$ *on nullmaatriks.*

Maatriksi normi nimetatakse kooskõlastatuks vektori normiga $\|x\|$, kui iga vektori x korral kehtib $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.
Kui maatriksi norm $\|A\|$ on kooskõlastatud vektori $\|x\|$ normiga selliselt, et mistahes maatriksi A puhul leidub selline vektor $x \neq 0$ nii, et kehtib võrdus $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$, siis öeldakse, et see maatriksi norm $\|A\|$ on allutatud vektori normile $\|x\|$.
Olgu A suvaline $(m\text{x}n)-$ristkülikmaatriks. Norme, mis on määratud seosega

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}},$$

kus λ_{max} on maatriksi $A^T A$ suurim omaväärtus, nimetatakse maatriksi A spektraalseks normiks, mis on kooskõlas vektori eukleidilise normiga ja allutatud temale.

Maatriksi normi nimetatakse kooskõlastatuks vektori normiga $\|x\|$, kui iga vektori x korral kehtib $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.
Kui maatriksi norm $\|A\|$ on kooskõlastatud vektori $\|x\|$ normiga selliselt, et mistahes maatriksi A puhul leidub selline vektor $x \neq 0$ nii, et kehtib võrdus $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$, siis öeldakse, et see maatriksi norm $\|A\|$ on allutatud vektori normile $\|x\|$.
Olgu A suvaline $(m\text{x}n)-$ristkülikmaatriks. Norme, mis on määratud seosega

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}},$$

kus λ_{max} on maatriksi A^TA suurim omaväärtus, nimetatakse maatriksi A spektraalseks normiks, mis on kooskõlas vektori eukleidilise normiga ja allutatud temale.

Maatriksi normi nimetatakse kooskõlastatuks vektori normiga $\|x\|$, kui iga vektori x korral kehtib $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

Kui maatriksi norm $\|A\|$ on kooskõlastatud vektori $\|x\|$ normiga selliselt, et mistahes maatriksi A puhul leidub selline vektor $x \neq 0$ nii, et kehtib võrdus $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$, siis öeldakse, et see maatriksi norm $\|A\|$ on allutatud vektori normile $\|x\|$.

Olgu A suvaline $(m\text{x}n)-$ristkülikmaatriks. Norme, mis on määratud seosega

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}},$$

kus λ_{max} on maatriksi $A^T A$ suurim omaväärtus, nimetatakse maatriksi A spektraalseks normiks, mis on kooskõlas vektori eukleidilise normiga ja allutatud temale.

Lisaks spektraalsele normile kasutatakse veel küll sageli maatriksi $\mathcal{L}_1-$normi ja $\mathcal{L}_\infty-$ normi, sest nad on lihtsalt arvutatavad.

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Lisaks spektraalsele normile kasutatakse veel küll sageli maatriksi $\mathcal{L}_1-$normi ja $\mathcal{L}_\infty-$ normi, sest nad on lihtsalt arvutatavad.

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Lisaks spektraalsele normile kasutatakse veel küll sageli maatriksi $\mathcal{L}_1-$normi ja $\mathcal{L}_\infty-$ normi, sest nad on lihtsalt arvutatavad.

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus $f_1, \ldots, f_m$ on funktsioonid.

Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$.

Võrrandisüsteemi vasakust poolest saab moodustuda vektori $F(x) = (f_1(x); f_2(x); \ldots; f_m(x))$. Vektor $F(x)$ sõltub vektorist x, seega on suurus F vektorfunktsioon ning süsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$.

Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus $f_1, \dots, f_m$ on funktsioonid.
Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \dots; x_m)$.
Võrrandisüsteemi vasakust poolest saab moodustuda vektori $F(x) = (f_1(x); f_2(x); \dots; f_m(x))$. Vektor $F(x)$ sõltub vektorist x, seega on suurus F vektorfunktsioon ning süsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$.

Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus $f_1, \ldots, f_m$ on funktsioonid.
Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$.
Võrrandisüsteemi vasakust poolest saab moodustuda vektori $F(x) = (f_1(x); f_2(x); \ldots; f_m(x))$. Vektor $F(x)$ sõltub vektorist x, seega on suurus F vektorfunktsioon ning süsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$.

Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus $f_1, \dots, f_m$ on funktsioonid.
Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \dots; x_m)$.
Võrrandisüsteemi vasakust poolest saab moodustuda vektori $F(x) = (f_1(x); f_2(x); \dots; f_m(x))$. Vektor $F(x)$ sõltub vektorist x, seega on suurus F vektorfunktsioon ning süsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$.

Jacobi maatriks

Vektorfunktsiooni $F(x)$ igast komponendist $f_i(x)$ saab leida m osatuletist $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_m}$. Kokku selliseid tuletisi mxm ning neist saab moodustada maatriksi

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Sellist maatriksit nimetatakse vektorfunktsiooni $F(x)$ Jacobi maatriksiks.

Jacobi maatriks

Vektorfunktsiooni $F(x)$ igast komponendist $f_i(x)$ saab leida m osatuletist $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_m}$. Kokku selliseid tuletisi mxm ning neist saab moodustada maatriksi

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Sellist maatriksit nimetatakse vektorfunktsiooni $F(x)$ Jacobi maatriksiks.

Jacobi maatriks

Vektorfunktsiooni $F(x)$ igast komponendist $f_i(x)$ saab leida m osatuletist $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_m}$. Kokku selliseid tuletisi mxm ning neist saab moodustada maatriksi

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Sellist maatriksit nimetatakse vektorfunktsiooni $F(x)$ Jacobi maatriksiks.

Jacobi maatriks

Vektorfunktsiooni $F(x)$ igast komponendist $f_i(x)$ saab leida m osatuletist $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_m}$. Kokku selliseid tuletisi mxm ning neist saab moodustada maatriksi

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Sellist maatriksit nimetatakse vektorfunktsiooni $F(x)$ Jacobi maatriksiks.

Harilik iteratsioonimeetod

Harilikku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$, ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Kui on antud alglähend $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, siis järgmise lähendi saab leida eeskirjast $x^1 = G(x^0)$, järgmisena $x^2 = G(x^1)$, jne. **Hariliku iteratsioonimeetodi** kuju on seega

$$x^n = G(x^{n-1})$$

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$, ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Kui on antud alglähend $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, siis järgmise lähendi saab leida eeskirjast $x^1 = G(x^0)$, järgmisena $x^2 = G(x^1)$, jne. **Hariliku iteratsioonimeetodi** kuju on seega

$$x^n = G(x^{n-1})$$

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$, ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Kui on antud alglähend $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, siis järgmise lähendi saab leida eeskirjast $x^1 = G(x^0)$, järgmisena $x^2 = G(x^1)$, jne. **Hariliku iteratsioonimeetodi** kuju on seega

$$x^n = G(x^{n-1})$$

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$,
ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Kui on antud alglähend $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, siis järgmise lähendi saab leida eeskirjast $x^1 = G(x^0)$, järgmisena $x^2 = G(x^1)$, jne.

Hariliku iteratsioonimeetodi kuju on seega

$$x^n = G(x^{n-1})$$

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$, ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Kui on antud alglähend $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, siis järgmise lähendi saab leida eeskirjast $x^1 = G(x^0)$, järgmisena $x^2 = G(x^1)$, jne. **Hariliku iteratsioonimeetodi** kuju on seega

$$x^n = G(x^{n-1})$$

või võrrandite kaupa

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \dots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \dots; x_m^{n-1}) \\ \dots \\ x_m^n = g_m(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \dots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Siit on lihtne tuletada **Seideli iteratsioonimeetodi** (või ka Gaussi-Seideli iteratsioonimeetod) eeskiri:

või võrrandite kaupa

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ \ldots \\ x_m^n = g_m(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Siit on lihtne tuletada **Seideli iteratsioonimeetodi** (või ka Gaussi-Seideli iteratsioonimeetod) eeskiri:

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; x_3^{n-1}; \dots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^n; x_2^{n-1}; x_3^{n-1} \dots; x_m^{n-1}) \\ x_3^n = g_3(x_1^n; x_2^n; x_3^{n-1} \dots; x_m^{n-1}) \\ \dots \\ x_m^n = g_m(x_1^n; x_2^n; \dots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Olgu meil teada süsteemi $F(x) = 0$ täpne lahend x^*, siis ka $x^* = G(x^*)$. Lähendi x^n erinevust täpsest lahendist x^* iseloomustab nende vaheline kaugus $||x^n - x^*||$.
Kui

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||x^n - x^*|| = 0,$$

siis koondub lähend x^n täpseks lahendiks x^*.

$$
\begin{cases}
x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; x_3^{n-1}; \dots ; x_m^{n-1}) \\
x_2^n = g_2(x_1^n; x_2^{n-1}; x_3^{n-1} \dots ; x_m^{n-1}) \\
x_3^n = g_3(x_1^n; x_2^n; x_3^{n-1} \dots ; x_m^{n-1}) \\
\dots \\
x_m^n = g_m(x_1^n; x_2^n; \dots ; x_m^{n-1})
\end{cases}
$$

Olgu meil teada süsteemi $F(x) = 0$ täpne lahend x^*, siis ka $x^* = G(x^*)$. Lähendi x^n erinevust täpsest lahendist x^* iseloomustab nende vaheline kaugus $||x^n - x^*||$.

Kui

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||x^n - x^*|| = 0,$$

siis koondub lähend x^n täpseks lahendiks x^*.

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; x_3^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^n; x_2^{n-1}; x_3^{n-1} \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_3^n = g_3(x_1^n; x_2^n; x_3^{n-1} \ldots; x_m^{n-1}) \\ \ldots \\ x_m^n = g_m(x_1^n; x_2^n; \ldots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Olgu meil teada süsteemi $F(x) = 0$ täpne lahend x^*, siis ka $x^* = G(x^*)$. Lähendi x^n erinevust täpsest lahendist x^* iseloomustab nende vaheline kaugus $||x^n - x^*||$.
Kui

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||x^n - x^*|| = 0,$$

siis koondub lähend x^n täpseks lahendiks x^*.

Oluline tingimus koondumiseks

$$||G'(x)|| \leq q < 1.$$

Teoreem

Leidugu süsteemi $F(x) = 0$ lahendit x^* sisaldav kera B, milles on täidetud võrratus $\|G'(x)\| \leq q < 1$. Peale selle eeldame, et vektorfunktsioon $G(x)$ ei vii kerast B välja, st iga $x \in B$ korral $G(x) \in B$. Olgu alglähend x^0 valitud hulgast B, siis koondub nii hariliku kui ka Seideli iteratsioonimeetodiga arvutatud lähendite jada x^n täpseks lahendiks x^*. Seejuures kehtib veahinnang

$$\|x^n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x^1 - x^0\|.$$

Oluline tingimus koondumiseks

$$||G'(x)|| \leq q < 1.$$

Teoreem

Leidugu süsteemi $F(x) = 0$ lahendit x^* sisaldav kera B, milles on täidetud võrratus $\|G'(x)\| \leq q < 1$. Peale selle eeldame, et vektorfunktsioon $G(x)$ ei vii kerast B välja, st iga $x \in B$ korral $G(x) \in B$. Olgu alglähend x^0 valitud hulgast B, siis koondub nii harilíku kui ka Seideli iteratsioonimeetodiga arvutatud lähendite jada x^n täpseks lahendiks x^*. Seejuures kehtib veahinnang

$$\|x^n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x^1 - x^0\|.$$

Newtoni meetod

Võrrandi $f(x) = 0$ korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul $F(x) = 0$. Siin $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.
Newtoni meetodi algoritm

$$x^n = x^{n-1} - \left[F'(x^{n-1})\right]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod

Võrrandi $f(x) = 0$ korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul $F(x) = 0$. Siin $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Newtoni meetodi algoritm

$$x^n = x^{n-1} - \left[F'(x^{n-1})\right]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \ldots, x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod

Võrrandi $f(x) = 0$ korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul $F(x) = 0$. Siin $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Newtoni meetodi algoritm

$$x^n = x^{n-1} - \left[F'(x^{n-1})\right]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \ldots, x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod

Võrrandi $f(x) = 0$ korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul $F(x) = 0$. Siin $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.
Newtoni meetodi algoritm

$$x^n = x^{n-1} - \left[F'(x^{n-1})\right]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \ldots, x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod on ruutkoonduvusega, st

$$||x^n - x^*|| \leq C||x^{n-1} - x^*||^2.$$

Modifitseeritud Newtoni meetod

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^0)]^{-1}F(x^{n-1})$$

Meetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Newtoni meetod on ruutkoonduvusega, st

$$||x^n - x^*|| \leq C||x^{n-1} - x^*||^2.$$

Modifitseeritud Newtoni meetod

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^0)]^{-1} F(x^{n-1})$$

Meetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.