

# Võrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus  $f(x)$  on ühemuutuja funktsioon.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

- 1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
- 2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

# Võrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus  $f(x)$  on ühemuutuja funktsioon.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

- 1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
- 2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

# Võrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus  $f(x)$  on ühemuutuja funktsioon.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

- 1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
- 2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

# Võrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus  $f(x)$  on ühemuutuja funktsioon.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

- 1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
- 2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

# Võrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus  $f(x)$  on ühemuutuja funktsioon.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

# Võrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus  $f(x)$  on ühemuutuja funktsioon.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

- 1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
- 2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

# Võrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus  $f(x)$  on ühemuutuja funktsioon.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

- 1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
- 2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

*Graafiline meetod*

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand  $f(x) = 0$  kirjutada ümbes kujule  $f_1(x) = f_2(x)$  ning joonistada kahe funktsiooni  $y = f_1(x)$  ja  $y = f_2(x)$  graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglähendi.

*Näide* Leiame võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  ligikaudseks lahendamiseks alglähendid.

Võrrandi võib kirjutada kujul  $x^3 = 1 - 2x$  ja siit joonistada  $y = x^3$  ja  $y = 1 - 2x$  graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta  $0,4 \sim 0,5$ .



**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

### *Graafiline meetod*

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand  $f(x) = 0$  kirjutada ümbes kujule  $f_1(x) = f_2(x)$  ning joonistada kahe funktsiooni  $y = f_1(x)$  ja  $y = f_2(x)$  graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annab(avad)ki vajaliku alglähendi.

*Näide* Leiame võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  ligikaudseks lahendamiseks alglähendid.

Võrrandi võib kirjutada kujul  $x^3 = 1 - 2x$  ja siit joonistada  $y = x^3$  ja  $y = 1 - 2x$  graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta  $0,4 \sim 0,5$ .

**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

### *Graafiline meetod*

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand  $f(x) = 0$  kirjutada ümbes kujule  $f_1(x) = f_2(x)$  ning joonistada kahe funktsiooni  $y = f_1(x)$  ja  $y = f_2(x)$  graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annab(iki) vajaliku alglähendi.

*Näide* Leiame võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  ligikaudseks lahendamiseks alglähendid.

Võrrandi võib kirjutada kujul  $x^3 = 1 - 2x$  ja siit joonistada  $y = x^3$  ja  $y = 1 - 2x$  graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta  $0,4 \sim 0,5$ .

**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

*Graafiline meetod*

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand  $f(x) = 0$  kirjutada ümber kujule  $f_1(x) = f_2(x)$  ning joonistada kahe funktsiooni  $y = f_1(x)$  ja  $y = f_2(x)$  graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglähendi.

*Näide* Leiame võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  ligikaudseks lahendamiseks alglähendid.

Võrrandi võib kirjutada kujul  $x^3 = 1 - 2x$  ja siit joonistada  $y = x^3$  ja  $y = 1 - 2x$  graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta  $0,4 \sim 0,5$ .

**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

### *Graafiline meetod*

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand  $f(x) = 0$  kirjutada ümbes kujule  $f_1(x) = f_2(x)$  ning joonistada kahe funktsiooni  $y = f_1(x)$  ja  $y = f_2(x)$  graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglähendi.

*Näide* Leiame võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  ligikaudseks lahendamiseks alglähendid.

Võrrandi võib kirjutada kujul  $x^3 = 1 - 2x$  ja siit joonistada  $y = x^3$  ja  $y = 1 - 2x$  graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta  $0,4 \sim 0,5$ .

**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

### *Graafiline meetod*

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand  $f(x) = 0$  kirjutada ümbes kujule  $f_1(x) = f_2(x)$  ning joonistada kahe funktsiooni  $y = f_1(x)$  ja  $y = f_2(x)$  graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglähendi.

*Näide* Leiame võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  ligikaudseks lahendamiseks alglähendid.

Võrrandi võib kirjutada kujul  $x^3 = 1 - 2x$  ja siit joonistada  $y = x^3$  ja  $y = 1 - 2x$  graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta  $0,4 \sim 0,5$ .

## *Tabel*

Kui  $f(x)$  on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.

Meie näite puhul  $f(0,4) = -0,136$  ja  $f(0,5) = 0,125$ .

## *Tabel*

Kui  $f(x)$  on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.

Meie näite puhul  $f(0,4) = -0,136$  ja  $f(0,5) = 0,125$ .

## *Tabel*

Kui  $f(x)$  on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.

Meie näite puhul  $f(0,4) = -0,136$  ja  $f(0,5) = 0,125$ .



## *Poolitamismeetod*

Selle korral arvutatakse funktsiooni  $f(x)$  väärtus lõigu  $[x_0, x_1]$  keskpunktis  $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ . Edasi võetakse vaatluse alla see poollõik, mille otstes on funktsiooni väärtustel erinev väärtus (seal asub vähemalt üks võrrandi  $f(x) = 0$  lahend) ja arvutatakse funktsiooni väärtus poollõigu keskpunktis. Valitakse uus poollõik ja korratakse protseduuri, kuni saame lähendile piisavalt täpsed tõkked.

### *Poolitamismeetod*

Selle korral arvutatakse funktsiooni  $f(x)$  väärtus lõigu  $[x_0, x_1]$  keskpunktis  $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ . Edasi võetakse vaatluse alla see poollõik, mille otstes on funktsiooni väärtustel erinev väärtus (seal asub vähemalt üks võrrandi  $f(x) = 0$  lahend) ja arvutatakse funktsiooni väärtus poollõigu keskpunktis. Valitakse uus poollõik ja korratakse protseduuri, kuni saame lähendile piisavalt täpsed tõkked.

## Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand  $f(x) = 0$  teisendada kujule

$$x = g(x), \quad (1)$$

kus  $g(x)$  on mingi ühe muutuja funktsioon.

Üks võimalus selleks on valida  $C \neq 0$  ning

$$f(x) = 0 \mid \cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame  $g(x) = x + Cf(x)$  ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

## Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand  $f(x) = 0$  teisendada kujule

$$x = g(x), \quad (1)$$

kus  $g(x)$  on mingi ühe muutuja funktsioon.

Üks võimalus selleks on valida  $C \neq 0$  ning

$$f(x) = 0 \mid \cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame  $g(x) = x + Cf(x)$  ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

## Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand  $f(x) = 0$  teisendada kujule

$$x = g(x), \quad (1)$$

kus  $g(x)$  on mingi ühe muutuja funktsioon.

Üks võimalus selleks on valida  $C \neq 0$  ning

$$f(x) = 0 \mid \cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame  $g(x) = x + Cf(x)$  ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

## Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand  $f(x) = 0$  teisendada kujule

$$x = g(x), \quad (1)$$

kus  $g(x)$  on mingi ühe muutuja funktsioon.

Üks võimalus selleks on valida  $C \neq 0$  ning

$$f(x) = 0 \mid \cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame  $g(x) = x + Cf(x)$  ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

## Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand  $f(x) = 0$  teisendada kujule

$$x = g(x), \quad (1)$$

kus  $g(x)$  on mingi ühe muutuja funktsioon.

Üks võimalus selleks on valida  $C \neq 0$  ning

$$f(x) = 0 \mid \cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame  $g(x) = x + Cf(x)$  ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

## *Näide*

Võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  korral võib leida

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  või

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .



*Näide*

Võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  korral võib leida

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  või

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

### *Näide*

Võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  korral võib leida

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  või

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad (2)$$

st  $x_1 = g(x_0)$ ,  $x_2 = g(x_1)$ , jne.

Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.

Uurime meetodi viga:

olgu  $x^*$  võrrandi (1) täpne lahend, st  $x^* \equiv g(x^*)$ . Lähendi  $x_n$  tõeline viga on  $|x_n - x^*|$ .

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad (2)$$

st  $x_1 = g(x_0)$ ,  $x_2 = g(x_1)$ , jne.

Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.

Uurime meetodi viga:

olgu  $x^*$  võrrandi (1) täpne lahend, st  $x^* \equiv g(x^*)$ . Lähendi  $x_n$  tõeline viga on  $|x_n - x^*|$ .

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad (2)$$

st  $x_1 = g(x_0)$ ,  $x_2 = g(x_1)$ , jne.

Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.

Uurime meetodi viga:

olgu  $x^*$  võrrandi (1) täpne lahend, st  $x^* \equiv g(x^*)$ . Lähendi  $x_n$  tõeline viga on  $|x_n - x^*|$ .

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad (2)$$

st  $x_1 = g(x_0)$ ,  $x_2 = g(x_1)$ , jne.

Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.

Uurime meetodi viga:

olgu  $x^*$  võrrandi (1) täpne lahend, st  $x^* \equiv g(x^*)$ . Lähendi  $x_n$  tõeline viga on  $|x_n - x^*|$ .

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad (2)$$

st  $x_1 = g(x_0)$ ,  $x_2 = g(x_1)$ , jne.

Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.

Uurime meetodi viga:

olgu  $x^*$  võrrandi (1) täpne lahend, st  $x^* \equiv g(x^*)$ . Lähendi  $x_n$  tõeline viga on  $|x_n - x^*|$ .

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad (2)$$

st  $x_1 = g(x_0)$ ,  $x_2 = g(x_1)$ , jne.

Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.

Uurime meetodi viga:

olgu  $x^*$  võrrandi (1) täpne lahend, st  $x^* \equiv g(x^*)$ . Lähendi  $x_n$  tõeline viga on  $|x_n - x^*|$ .



Kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0,$$

siis koondub lähend  $x_n$  täpseks lahendiks  $x^*$ , st  $x_n \rightarrow x^*$ .

Oluline tingimus sellise koondumise jaoks on

$$|g'(x)| \leq q < 1. \quad (3)$$

Kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0,$$

siis koondub lähend  $x_n$  täpseks lahendiks  $x^*$ , st  $x_n \rightarrow x^*$ .  
Oluline tingimus sellise koondumise jaoks on

$$|g'(x)| \leq q < 1. \quad (3)$$

## Teoreem

Leidugu võrrandi (1) lahendit  $x^*$  sisaldav vahemik  $(a, b)$ , milles on täidetud võrratus (3). Olgu funktsioon  $g(x)$  selline, et  $\forall x \in (a, b)$  korral  $g(x) \in (a, b)$ . Olgu  $x_0 \in (a, b)$ . Siis koondub harilikku iteratsioonimeetodiga arvatatud lähendite jada  $x_n$  täpseks lahendiks  $x^*$ . Lisaks kehtib veahinnang

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|. \quad (4)$$

## Tõestus

Et  $x_0 \in (a, b)$  ja  $g(x)$  ei vii vahemikust  $(a, b)$  välja, siis  
 $x_1 = g(x_0) \in (a, b)$ ,  $x_2 = g(x_1) \in (a, b)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = g(x_{n-1}) \in (a, b)$ .

Et  $x^*$  on võrrandi (1) täpne lahend, siis

$$x^* \equiv g(x^*).$$

Lahutame seosest (2) viimase võrduse, saame

$$x_n - x^* = g(x_{n-1}) - g(x^*).$$

Kasutame Lagrange'i keskväärtusteoreemi  
(Punktide  $x_{n-1}$  ja  $x^*$  vahel leidub punkt  $c_n$  nii, et

$$g(x_{n-1}) - g(x^*) = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Seega

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

## Tõestus

Et  $x_0 \in (a, b)$  ja  $g(x)$  ei vii vahemikust  $(a, b)$  välja, siis  
 $x_1 = g(x_0) \in (a, b)$ ,  $x_2 = g(x_1) \in (a, b)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = g(x_{n-1}) \in (a, b)$ .  
Et  $x^*$  on võrrandi (1) täpne lahend, siis

$$x^* \equiv g(x^*).$$

Lahutame seosest (2) viimase võrduse, saame

$$x_n - x^* = g(x_{n-1}) - g(x^*).$$

Kasutame Lagrange'i keskväärtusteoreemi  
(Punktide  $x_{n-1}$  ja  $x^*$  vahel leidub punkt  $c_n$  nii, et

$$g(x_{n-1}) - g(x^*) = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Seega

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

## Tõestus

Et  $x_0 \in (a, b)$  ja  $g(x)$  ei vii vahemikust  $(a, b)$  välja, siis  
 $x_1 = g(x_0) \in (a, b)$ ,  $x_2 = g(x_1) \in (a, b)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = g(x_{n-1}) \in (a, b)$ .  
Et  $x^*$  on võrrandi (1) täpne lahend, siis

$$x^* \equiv g(x^*).$$

Lahutame seosest (2) viimase võrduse, saame

$$x_n - x^* = g(x_{n-1}) - g(x^*).$$

Kasutame Lagrange'i keskväärtusteoreemi

*(Punktide  $x_{n-1}$  ja  $x^*$  vahel leidub punkt  $c_n$  nii, et*

$$g(x_{n-1}) - g(x^*) = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Seega

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

## Tõestus

Et  $x_0 \in (a, b)$  ja  $g(x)$  ei vii vahemikust  $(a, b)$  välja, siis  
 $x_1 = g(x_0) \in (a, b)$ ,  $x_2 = g(x_1) \in (a, b)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = g(x_{n-1}) \in (a, b)$ .  
Et  $x^*$  on võrrandi (1) täpne lahend, siis

$$x^* \equiv g(x^*).$$

Lahutame seosest (2) viimase võrduse, saame

$$x_n - x^* = g(x_{n-1}) - g(x^*).$$

Kasutame Lagrange'i keskväärtusteoreemi  
(Punktide  $x_{n-1}$  ja  $x^*$  vahel leidub punkt  $c_n$  nii, et

$$g(x_{n-1}) - g(x^*) = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Seega

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

## Tõestus

Et  $x_0 \in (a, b)$  ja  $g(x)$  ei vii vahemikust  $(a, b)$  välja, siis  
 $x_1 = g(x_0) \in (a, b)$ ,  $x_2 = g(x_1) \in (a, b)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = g(x_{n-1}) \in (a, b)$ .  
Et  $x^*$  on võrrandi (1) täpne lahend, siis

$$x^* \equiv g(x^*).$$

Lahutame seosest (2) viimase võrduse, saame

$$x_n - x^* = g(x_{n-1}) - g(x^*).$$

Kasutame Lagrange'i keskvaärtusteoreemi  
(Punktide  $x_{n-1}$  ja  $x^*$  vahel leidub punkt  $c_n$  nii, et

$$g(x_{n-1}) - g(x^*) = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Seega

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$



Teame, et  $x_{n-1}, x^* \in (a, b)$ , järelikult ka  $c_n \in (a, b)$ . Meie eelduse põhjal  $|g'(c_n)| \leq q < 1$ .

Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*| \leq q^2 |x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq q^n |x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \quad (5)$$

Et  $q < 1$ , siis  $q^n \rightarrow 0$ , kui  $n \rightarrow \infty$ . Seega

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Koondumine  $x_n \rightarrow x^*$  on näidatud.

Teame, et  $x_{n-1}, x^* \in (a, b)$ , järelikult ka  $c_n \in (a, b)$ . Meie eelduse põhjal  $|g'(c_n)| \leq q < 1$ .

Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*| \leq q^2 |x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq q^n |x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \quad (5)$$

Et  $q < 1$ , siis  $q^n \rightarrow 0$ , kui  $n \rightarrow \infty$ . Seega

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Koondumine  $x_n \rightarrow x^*$  on näidatud.

Teame, et  $x_{n-1}, x^* \in (a, b)$ , järelikult ka  $c_n \in (a, b)$ . Meie eelduse põhjal  $|g'(c_n)| \leq q < 1$ .

Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*| \leq q^2 |x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq q^n |x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \quad (5)$$

Et  $q < 1$ , siis  $q^n \rightarrow 0$ , kui  $n \rightarrow \infty$ . Seega

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Koondumine  $x_n \rightarrow x^*$  on näidatud.

Teame, et  $x_{n-1}, x^* \in (a, b)$ , järelikult ka  $c_n \in (a, b)$ . Meie eelduse põhjal  $|g'(c_n)| \leq q < 1$ .

Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*| \leq q^2 |x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq q^n |x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \quad (5)$$

Et  $q < 1$ , siis  $q^n \rightarrow 0$ , kui  $n \rightarrow \infty$ . Seega

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Koondumine  $x_n \rightarrow x^*$  on näidatud.

Teame, et  $x_{n-1}, x^* \in (a, b)$ , järelikult ka  $c_n \in (a, b)$ . Meie eelduse põhjal  $|g'(c_n)| \leq q < 1$ .

Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*| \leq q^2 |x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq q^n |x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \quad (5)$$

Et  $q < 1$ , siis  $q^n \rightarrow 0$ , kui  $n \rightarrow \infty$ . Seega

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Koondumine  $x_n \rightarrow x^*$  on näidatud.

Teame, et  $x_{n-1}, x^* \in (a, b)$ , järelikult ka  $c_n \in (a, b)$ . Meie eelduse põhjal  $|g'(c_n)| \leq q < 1$ .

Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*| \leq q^2 |x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq q^n |x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \quad (5)$$

Et  $q < 1$ , siis  $q^n \rightarrow 0$ , kui  $n \rightarrow \infty$ . Seega

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \quad \text{kui } n \rightarrow \infty.$$

Koondumine  $x_n \rightarrow x^*$  on näidatud.

Teame, et  $x_{n-1}, x^* \in (a, b)$ , järelikult ka  $c_n \in (a, b)$ . Meie eelduse põhjal  $|g'(c_n)| \leq q < 1$ .

Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*| \leq q^2 |x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq q^n |x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \quad (5)$$

Et  $q < 1$ , siis  $q^n \rightarrow 0$ , kui  $n \rightarrow \infty$ . Seega

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Koondumine  $x_n \rightarrow x^*$  on näidatud.

Teame, et  $x_{n-1}, x^* \in (a, b)$ , järelikult ka  $c_n \in (a, b)$ . Meie eelduse põhjal  $|g'(c_n)| \leq q < 1$ .

Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*| \leq q^2 |x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq q^n |x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \quad (5)$$

Et  $q < 1$ , siis  $q^n \rightarrow 0$ , kui  $n \rightarrow \infty$ . Seega

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Koondumine  $x_n \rightarrow x^*$  on näidatud.



Valem (5) ei sobi praktilistes arvutustes, sest paremal pool on tundmatu suurus  $x^*$ . Tuletame praktilisema hinnangu.

$$\begin{aligned} |x_0 - x^*| &= |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \leq \\ &\leq |x_0 - x_1| + q|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Koondades selles võrratuses sarnased liikmed, saame

$$(1 - q)|x_0 - x^*| \leq |x_0 - x_1|,$$

siit

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Jagasime suurusega  $1 - q$  ( $1 - q > 0$ , sest  $q < 1$ ).  
Kasutades saadud hinnangut seoses (5) saimegi hinnangu (4).

**/mott**

Valem (5) ei sobi praktilistes arvutustes, sest paremal pool on tundmatu suurus  $x^*$ . Tuletame praktilisema hinnangu.

$$\begin{aligned} |x_0 - x^*| &= |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \leq \\ &\leq |x_0 - x_1| + q|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Koondades selles võrratuses sarnased liikmed, saame

$$(1 - q)|x_0 - x^*| \leq |x_0 - x_1|,$$

siit

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Jagasime suurusega  $1 - q$  ( $1 - q > 0$ , sest  $q < 1$ ).  
Kasutades saadud hinnangut seoses (5) saimegi hinnangu (4).

**/mott**

Valem (5) ei sobi praktilistes arvutustes, sest paremal pool on tundmatu suurus  $x^*$ . Tuletame praktilisema hinnangu.

$$\begin{aligned} |x_0 - x^*| &= |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \leq \\ &\leq |x_0 - x_1| + q|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Koondades selles võrratuses sarnased liikmed, saame

$$(1 - q)|x_0 - x^*| \leq |x_0 - x_1|,$$

siit

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Jagasime suurusega  $1 - q$  ( $1 - q > 0$ , sest  $q < 1$ ).  
Kasutades saadud hinnangut seoses (5) saimegi hinnangu (4).

**/mott**

Valem (5) ei sobi praktilistes arvutustes, sest paremal pool on tundmatu suurus  $x^*$ . Tuletame praktilisema hinnangu.

$$\begin{aligned} |x_0 - x^*| &= |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \leq \\ &\leq |x_0 - x_1| + q|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Koondades selles võrratuses sarnased liikmed, saame

$$(1 - q)|x_0 - x^*| \leq |x_0 - x_1|,$$

siit

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Jagasime suurusega  $1 - q$  ( $1 - q > 0$ , sest  $q < 1$ ).  
Kasutades saadud hinnangut seoses (5) saimegi hinnangu (4).

**/mott**

Valem (5) ei sobi praktilistes arvutustes, sest paremal pool on tundmatu suurus  $x^*$ . Tuletame praktilisema hinnangu.

$$\begin{aligned} |x_0 - x^*| &= |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \leq \\ &\leq |x_0 - x_1| + q|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Koondades selles võrratuses sarnased liikmed, saame

$$(1 - q)|x_0 - x^*| \leq |x_0 - x_1|,$$

siit

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Jagasime suurusega  $1 - q$  ( $1 - q > 0$ , sest  $q < 1$ ).

Kasutades saadud hinnangut seoses (5) saimegi hinnangu (4).

/mott

Valem (5) ei sobi praktilistes arvutustes, sest paremal pool on tundmatu suurus  $x^*$ . Tuletame praktilisema hinnangu.

$$\begin{aligned} |x_0 - x^*| &= |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \leq \\ &\leq |x_0 - x_1| + q|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Koondades selles võrratuses sarnased liikmed, saame

$$(1 - q)|x_0 - x^*| \leq |x_0 - x_1|,$$

siit

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Jagasime suurusega  $1 - q$  ( $1 - q > 0$ , sest  $q < 1$ ).  
Kasutades saadud hinnangut seoses (5) saimegi hinnangu (4).

**/mott**

Hinnangu (4) paremat poolt võib ka vaadelda, kui geomeetrilist jada  $a, aq, aq^2, \dots$ , kus  $a = \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q}$ . Et  $q < 1$ , siis on tegu hääbuva geomeetrilise jadaga ning võib öelda, et **harilik iteratsioonimeetod koondub geomeetrilise progressioni kiirusega.**

Saab tõestada, et kui kõikjal lahendit  $x^*$  sisaldavas vahemikus  $|g'(x)| > 1$ , siis meetod ei koonu.

Hinnangu (4) paremat poolt võib ka vaadelda, kui geomeetrilist jada  $a, aq, aq^2, \dots$ , kus  $a = \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q}$ . Et  $q < 1$ , siis on tegu hääbuva geomeetrilise jadaga ning võib öelda, et **harilik iteratsioonimeetod koondub geomeetrilise progressioni kiirusega.**

Saab tõestada, et kui kõikjal lahendit  $x^*$  sisaldavas vahemikus  $|g'(x)| > 1$ , siis meetod ei koonu.



## Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  ja

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Leidsime, et alglähendiks  $x_0$  sobib 0,5. Alglähend

$$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7].$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui  $x = 0,5(1 - x^3)$ , siis  $g(x) = 0,5(1 - x^3)$  ning  $g'(x) = -1,5x^2$ .

$$|g'(0, 1)| = 0,015 < 1, \text{ samuti } |g'(0, 7)| = 0,735 < 1.$$

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ , siis  $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$  ja  $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ .

$$|g'(0, 1)| = 1,04 > 1 \text{ ja } |g'(0, 7)| = 4,167 > 1.$$

Tingimus (3) pole täidetud.

## Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  ja

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Leidsime, et alglähendiks  $x_0$  sobib 0,5. Alglähend

$$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7].$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui  $x = 0,5(1 - x^3)$ , siis  $g(x) = 0,5(1 - x^3)$  ning  $g'(x) = -1,5x^2$ .

$$|g'(0, 1)| = 0,015 < 1, \text{ samuti } |g'(0, 7)| = 0,735 < 1.$$

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ , siis  $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$  ja  $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ .

$$|g'(0, 1)| = 1,04 > 1 \text{ ja } |g'(0, 7)| = 4,167 > 1.$$

Tingimus (3) pole täidetud.

## Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  ja

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Leidsime, et alglähendiks  $x_0$  sobib 0,5. Alglähend

$$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7].$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui  $x = 0,5(1 - x^3)$ , siis  $g(x) = 0,5(1 - x^3)$  ning  $g'(x) = -1,5x^2$ .

$$|g'(0, 1)| = 0,015 < 1, \text{ samuti } |g'(0, 7)| = 0,735 < 1.$$

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ , siis  $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$  ja  $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ .

$$|g'(0, 1)| = 1,04 > 1 \text{ ja } |g'(0, 7)| = 4,167 > 1.$$

Tingimus (3) pole täidetud.

## Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  ja

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Leidsime, et alglähendiks  $x_0$  sobib 0,5. Alglähend

$$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7].$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui  $x = 0,5(1 - x^3)$ , siis  $g(x) = 0,5(1 - x^3)$  ning  $g'(x) = -1,5x^2$ .

$|g'(0,1)| = 0,015 < 1$ , samuti  $|g'(0,7)| = 0,735 < 1$ .

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ , siis  $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$  ja  $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ .

$|g'(0,1)| = 1,04 > 1$  ja  $|g'(0,7)| = 4,167 > 1$ .

Tingimus (3) pole täidetud.

## Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  ja

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Leidsime, et alglähendiks  $x_0$  sobib 0,5. Alglähend

$$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7].$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui  $x = 0,5(1 - x^3)$ , siis  $g(x) = 0,5(1 - x^3)$  ning  $g'(x) = -1,5x^2$ .

$$|g'(0, 1)| = 0,015 < 1, \text{ samuti } |g'(0, 7)| = 0,735 < 1.$$

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ , siis  $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$  ja  $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ .

$$|g'(0, 1)| = 1,04 > 1 \text{ ja } |g'(0, 7)| = 4,167 > 1.$$

Tingimus (3) pole täidetud.

## Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  ja

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Leidsime, et alglähendiks  $x_0$  sobib 0,5. Alglähend

$$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7].$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui  $x = 0,5(1 - x^3)$ , siis  $g(x) = 0,5(1 - x^3)$  ning  $g'(x) = -1,5x^2$ .

$$|g'(0, 1)| = 0,015 < 1, \text{ samuti } |g'(0, 7)| = 0,735 < 1.$$

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ , siis  $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$  ja  $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ .

$$|g'(0, 1)| = 1,04 > 1 \text{ ja } |g'(0, 7)| = 4,167 > 1.$$

Tingimus (3) pole täidetud.

## Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  ja

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Leidsime, et alglähendiks  $x_0$  sobib 0,5. Alglähend

$$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7].$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui  $x = 0,5(1 - x^3)$ , siis  $g(x) = 0,5(1 - x^3)$  ning  $g'(x) = -1,5x^2$ .

$$|g'(0, 1)| = 0,015 < 1, \text{ samuti } |g'(0, 7)| = 0,735 < 1.$$

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ , siis  $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$  ja  $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ .

$$|g'(0, 1)| = 1,04 > 1 \text{ ja } |g'(0, 7)| = 4,167 > 1.$$

Tingimus (3) pole täidetud.

## Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  ja

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Leidsime, et alglähendiks  $x_0$  sobib 0,5. Alglähend

$$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7].$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui  $x = 0,5(1 - x^3)$ , siis  $g(x) = 0,5(1 - x^3)$  ning  $g'(x) = -1,5x^2$ .

$$|g'(0, 1)| = 0,015 < 1, \text{ samuti } |g'(0, 7)| = 0,735 < 1.$$

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ , siis  $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$  ja  $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ .

$$|g'(0, 1)| = 1,04 > 1 \text{ ja } |g'(0, 7)| = 4,167 > 1.$$

Tingimus (3) pole täidetud.



## Näide

Jätkame eelmise näitega, kus oli vaja lahendada võrrand

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju

1)  $x = 0,5(1 - x^3)$  ja

2)  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ .

Leidsime, et alglähendiks  $x_0$  sobib 0,5. Alglähend

$$x_0 = 0,5 \in [0, 1; 0, 7].$$

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui  $x = 0,5(1 - x^3)$ , siis  $g(x) = 0,5(1 - x^3)$  ning  $g'(x) = -1,5x^2$ .

$$|g'(0, 1)| = 0,015 < 1, \text{ samuti } |g'(0, 7)| = 0,735 < 1.$$

Tingimus (3) on täidetud.

2) Kui  $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$ , siis  $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$  ja  $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ .

$$|g'(0, 1)| = 1,04 > 1 \text{ ja } |g'(0, 7)| = 4,167 > 1.$$

Tingimus (3) pole täidetud.

Vastavalt tõestatud teoreemile oleme leidnud koonduva hariliku iteratsioonimeetodi. Seega saame leida võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  ligikaudse lahendi eeskirjaga

$$x_n = 0,5(1 - x_{n-1}^3)$$

ehk

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = 0,5(1 - x_0^3) = 0,5(1 - 0,5^3) = 0,4375$$

$$x_2 = 0,5(1 - x_1^3) \approx 0,4581$$

$$x_3 = 0,5(1 - x_2^3) \approx 0,4519$$

...

$$x_{10} \approx x_{11} \approx 0,4534.$$

*Kontrolliks  $0,4534^3 + 2 \cdot 0,4534 - 1 \approx 6,14 \cdot 10^{-6}$ .*

Vastavalt tõestatud teoreemile oleme leidnud koonduva hariliku iteratsioonimeetodi. Seega saame leida võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  ligikaudse lahendi eeskirjaga

$$x_n = 0,5(1 - x_{n-1}^3)$$

ehk

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = 0,5(1 - x_0^3) = 0,5(1 - 0,5^3) = 0,4375$$

$$x_2 = 0,5(1 - x_1^3) \approx 0,4581$$

$$x_3 = 0,5(1 - x_2^3) \approx 0,4519$$

...

$$x_{10} \approx x_{11} \approx 0,4534.$$

*Kontrolliks*  $0,4534^3 + 2 \cdot 0,4534 - 1 \approx 6,14 \cdot 10^{-6}$ .

# Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Hariliku iteratsioonimeetodi korral kehtis

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Esitame sama seose  $x_{n+1}$  ja  $x^*$  jaoks:

$$x_{n+1} - x^* = g'(c_{n+1})(x_n - x^*).$$

Suurus  $x_n < c_{n+1} < x^*$ . Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n-1} \approx x_n \approx x^*$ . Seega  $x^* \approx c_n \approx c_{n+1}$ .

Kui  $g'(x)$  on pidev funktsioon, siis kehtib

$$g'(c_n) \approx g'(c_{n+1}).$$

Tähistame näiteks  $a_n = g'(c_n)$ , siis  $a_n \approx g'(c_{n+1})$ .

# Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Hariliku iteratsioonimeetodi korral kehtis

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Esitame sama seose  $x_{n+1}$  ja  $x^*$  jaoks:

$$x_{n+1} - x^* = g'(c_{n+1})(x_n - x^*).$$

Suurus  $x_n < c_{n+1} < x^*$ . Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n-1} \approx x_n \approx x^*$ . Seega  $x^* \approx c_n \approx c_{n+1}$ .

Kui  $g'(x)$  on pidev funktsioon, siis kehtib

$$g'(c_n) \approx g'(c_{n+1}).$$

Tähistame näiteks  $a_n = g'(c_n)$ , siis  $a_n \approx g'(c_{n+1})$ .

# Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Hariliku iteratsioonimeetodi korral kehtis

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Esitame sama seose  $x_{n+1}$  ja  $x^*$  jaoks:

$$x_{n+1} - x^* = g'(c_{n+1})(x_n - x^*).$$

Suurus  $x_n < c_{n+1} < x^*$ . Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n-1} \approx x_n \approx x^*$ . Seega  $x^* \approx c_n \approx c_{n+1}$ .

Kui  $g'(x)$  on pidev funktsioon, siis kehtib

$$g'(c_n) \approx g'(c_{n+1}).$$

Tähistame näiteks  $a_n = g'(c_n)$ , siis  $a_n \approx g'(c_{n+1})$ .

# Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Hariliku iteratsioonimeetodi korral kehtis

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Esitame sama seose  $x_{n+1}$  ja  $x^*$  jaoks:

$$x_{n+1} - x^* = g'(c_{n+1})(x_n - x^*).$$

Suurus  $x_n < c_{n+1} < x^*$ . Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n-1} \approx x_n \approx x^*$ . Seega  $x^* \approx c_n \approx c_{n+1}$ .

Kui  $g'(x)$  on pidev funktsioon, siis kehtib

$$g'(c_n) \approx g'(c_{n+1}).$$

Tähistame näiteks  $a_n = g'(c_n)$ , siis  $a_n \approx g'(c_{n+1})$ .

# Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Hariliku iteratsioonimeetodi korral kehtis

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Esitame sama seose  $x_{n+1}$  ja  $x^*$  jaoks:

$$x_{n+1} - x^* = g'(c_{n+1})(x_n - x^*).$$

Suurus  $x_n < c_{n+1} < x^*$ . Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n-1} \approx x_n \approx x^*$ . Seega  $x^* \approx c_n \approx c_{n+1}$ .

Kui  $g'(x)$  on pidev funktsioon, siis kehtib

$$g'(c_n) \approx g'(c_{n+1}).$$

Tähistame näiteks  $a_n = g'(c_n)$ , siis  $a_n \approx g'(c_{n+1})$ .



# Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Hariliku iteratsioonimeetodi korral kehtis

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Esitame sama seose  $x_{n+1}$  ja  $x^*$  jaoks:

$$x_{n+1} - x^* = g'(c_{n+1})(x_n - x^*).$$

Suurus  $x_n < c_{n+1} < x^*$ . Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n-1} \approx x_n \approx x^*$ . Seega  $x^* \approx c_n \approx c_{n+1}$ .

Kui  $g'(x)$  on pidev funktsioon, siis kehtib

$$g'(c_n) \approx g'(c_{n+1}).$$

Tähistame näiteks  $a_n = g'(c_n)$ , siis  $a_n \approx g'(c_{n+1})$ .

# Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Hariliku iteratsioonimeetodi korral kehtis

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Esitame sama seose  $x_{n+1}$  ja  $x^*$  jaoks:

$$x_{n+1} - x^* = g'(c_{n+1})(x_n - x^*).$$

Suurus  $x_n < c_{n+1} < x^*$ . Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n-1} \approx x_n \approx x^*$ . Seega  $x^* \approx c_n \approx c_{n+1}$ .

Kui  $g'(x)$  on pidev funktsioon, siis kehtib

$$g'(c_n) \approx g'(c_{n+1}).$$

Tähistame näiteks  $a_n = g'(c_n)$ , siis  $a_n \approx g'(c_{n+1})$ .

Neid tähistusi kasutades saame esialgsed seosed kirjutada süsteemi

$$\begin{cases} x_n - x^* = a_n(x_{n-1} - x^*) \\ x_{n+1} - x^* \approx a_n(x_n - x^*) \end{cases}$$

Selles süsteemis on meie jaoks tundmatud  $a_n$  ja  $x^*$ . Süsteemi lahendamisel saame otsitava ligikaudse väärtuse  $x^*$ :

$$x^* \approx \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suurust saab kasutada  $x_{n+1}$  parandamiseks:

$$\overline{x_{n+1}} = \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Neid tähistusi kasutades saame esialgsed seosed kirjutada süsteemi

$$\begin{cases} x_n - x^* = a_n(x_{n-1} - x^*) \\ x_{n+1} - x^* \approx a_n(x_n - x^*) \end{cases}$$

Selles süsteemis on meie jaoks tundmatud  $a_n$  ja  $x^*$ . Süsteemi lahendamisel saame otsitava ligikaudse väärtuse  $x^*$ :

$$x^* \approx \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suurust saab kasutada  $x_{n+1}$  parandamiseks:

$$\overline{x_{n+1}} = \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Neid tähistusi kasutades saame esialgsed seosed kirjutada süsteemi

$$\begin{cases} x_n - x^* = a_n(x_{n-1} - x^*) \\ x_{n+1} - x^* \approx a_n(x_n - x^*) \end{cases}$$

Selles süsteemis on meie jaoks tundmatud  $a_n$  ja  $x^*$ . Süsteemi lahendamisel saame otsitava ligikaudse väärtuse  $x^*$ :

$$x^* \approx \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suurust saab kasutada  $x_{n+1}$  parandamiseks:

$$\overline{x_{n+1}} = \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Neid tähistusi kasutades saame esialgsed seosed kirjutada süsteemi

$$\begin{cases} x_n - x^* = a_n(x_{n-1} - x^*) \\ x_{n+1} - x^* \approx a_n(x_n - x^*) \end{cases}$$

Selles süsteemis on meie jaoks tundmatud  $a_n$  ja  $x^*$ . Süsteemi lahendamisel saame otsitava ligikaudse väärtuse  $x^*$ :

$$x^* \approx \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suurust saab kasutada  $x_{n+1}$  parandamiseks:

$$\overline{x_{n+1}} = \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Neid tähistusi kasutades saame esialgsed seosed kirjutada süsteemi

$$\begin{cases} x_n - x^* = a_n(x_{n-1} - x^*) \\ x_{n+1} - x^* \approx a_n(x_n - x^*) \end{cases}$$

Selles süsteemis on meie jaoks tundmatud  $a_n$  ja  $x^*$ . Süsteemi lahendamisel saame otsitava ligikaudse väärtuse  $x^*$ :

$$x^* \approx \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suurust saab kasutada  $x_{n+1}$  parandamiseks:

$$\overline{x_{n+1}} = \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suuruse abil saab leida  $x_{n+2} = g(\overline{x_{n+1}})$ . Nüüd omakorda on võimalik  $x_{n+1}$ ,  $\overline{x_{n+1}}$  ja  $x_{n+2}$  põhjal leida  $\overline{x_{n+2}}$ . Siit  $x_{n+3} = g(\overline{x_{n+2}})$ , jne.



# Newtoni meetod

Vaatame võrrandit  $f(x) = 0$ . Hariliku iteratsioonimeetodi korral

$x = g(x)$ , kus  $g(x) = x + Cf(x)$  ( $C$  on suvaline konstant).

Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et

$|g'(x)| \leq q < 1$ , kusjuures mida väiksem  $q$ , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi  $C$  nii, et  $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$  oleks  $x^*$  lähedal võimalikult väike.

Võime valida igal iteratsioonisammul erineva  $C$  väärtuse. Kui  $x_{n-1}$  on leitud, siis valime  $C$  nii, et  $g'(x_{n-1}) = 0$  ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi  $C$  suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

# Newtoni meetod

Vaatame võrrandit  $f(x) = 0$ . Hariliku iteratsioonimeetodi korral  $x = g(x)$ , kus  $g(x) = x + Cf(x)$  ( $C$  on suvaline konstant).

Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et  $|g'(x)| \leq q < 1$ , kusjuures mida väiksem  $q$ , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi  $C$  nii, et  $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$  oleks  $x^*$  lähedal võimalikult väike.

Võime valida igal iteratsioonisammul erineva  $C$  väärtuse. Kui  $x_{n-1}$  on leitud, siis valime  $C$  nii, et  $g'(x_{n-1}) = 0$  ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi  $C$  suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

# Newtoni meetod

Vaatame võrrandit  $f(x) = 0$ . Hariliku iteratsioonimeetodi korral  $x = g(x)$ , kus  $g(x) = x + Cf(x)$  ( $C$  on suvaline konstant). Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et  $|g'(x)| \leq q < 1$ , kusjuures mida väiksem  $q$ , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi  $C$  nii, et  $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$  oleks  $x^*$  lähedal võimalikult väike. Võime valida igal iteratsioonisammul erineva  $C$  väärtuse. Kui  $x_{n-1}$  on leitud, siis valime  $C$  nii, et  $g'(x_{n-1}) = 0$  ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi  $C$  suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

# Newtoni meetod

Vaatame võrrandit  $f(x) = 0$ . Hariliku iteratsioonimeetodi korral  $x = g(x)$ , kus  $g(x) = x + Cf(x)$  ( $C$  on suvaline konstant). Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et  $|g'(x)| \leq q < 1$ , kusjuures mida väiksem  $q$ , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi  $C$  nii, et  $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$  oleks  $x^*$  lähedal võimalikult väike.

Võime valida igal iteratsioonisammul erineva  $C$  väärtuse. Kui  $x_{n-1}$  on leitud, siis valime  $C$  nii, et  $g'(x_{n-1}) = 0$  ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi  $C$  suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

# Newtoni meetod

Vaatame võrrandit  $f(x) = 0$ . Hariliku iteratsioonimeetodi korral  $x = g(x)$ , kus  $g(x) = x + Cf(x)$  ( $C$  on suvaline konstant). Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et  $|g'(x)| \leq q < 1$ , kusjuures mida väiksem  $q$ , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi  $C$  nii, et  $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$  oleks  $x^*$  lähedal võimalikult väike. Võime valida igal iteratsioonisammul erineva  $C$  väärtuse. Kui  $x_{n-1}$  on leitud, siis valime  $C$  nii, et  $g'(x_{n-1}) = 0$  ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi  $C$  suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

# Newtoni meetod

Vaatame võrrandit  $f(x) = 0$ . Hariliku iteratsioonimeetodi korral  $x = g(x)$ , kus  $g(x) = x + Cf(x)$  ( $C$  on suvaline konstant). Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et  $|g'(x)| \leq q < 1$ , kusjuures mida väiksem  $q$ , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi  $C$  nii, et  $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$  oleks  $x^*$  lähedal võimalikult väike. Võime valida igal iteratsioonisammul erineva  $C$  väärtuse. Kui  $x_{n-1}$  on leitud, siis valime  $C$  nii, et  $g'(x_{n-1}) = 0$  ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi  $C$  suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

# Newtoni meetod

Vaatame võrrandit  $f(x) = 0$ . Hariliku iteratsioonimeetodi korral  $x = g(x)$ , kus  $g(x) = x + Cf(x)$  ( $C$  on suvaline konstant). Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et  $|g'(x)| \leq q < 1$ , kusjuures mida väiksem  $q$ , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi  $C$  nii, et  $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$  oleks  $x^*$  lähedal võimalikult väike. Võime valida igal iteratsioonisammul erineva  $C$  väärtuse. Kui  $x_{n-1}$  on leitud, siis valime  $C$  nii, et  $g'(x_{n-1}) = 0$  ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi  $C$  suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

# Newtoni meetod

Vaatame võrrandit  $f(x) = 0$ . Hariliku iteratsioonimeetodi korral  $x = g(x)$ , kus  $g(x) = x + Cf(x)$  ( $C$  on suvaline konstant). Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et  $|g'(x)| \leq q < 1$ , kusjuures mida väiksem  $q$ , seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi  $C$  nii, et  $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$  oleks  $x^*$  lähedal võimalikult väike. Võime valida igal iteratsioonisammul erineva  $C$  väärtuse. Kui  $x_{n-1}$  on leitud, siis valime  $C$  nii, et  $g'(x_{n-1}) = 0$  ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi  $C$  suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$



ja hariliku iteratsioonimeetodi eeskiri  $x_n = g(x_{n-1})$  saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks**.

Newtoni meetod on ühesammuline meetod.

Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja algühend  $x_0$  peab olema otsitavale lahendile  $x^*$  piisavalt lähedal.

Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus  $\gamma$  sõltub konstandist  $K$ .

ja hariliku iteratsioonimeetodi eeskiri  $x_n = g(x_{n-1})$  saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks**.

Newtoni meetod on ühesammuline meetod.

Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja algühend  $x_0$  peab olema otsitavale lahendile  $x^*$  piisavalt lähedal.

Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus  $\gamma$  sõltub konstandist  $K$ .

ja hariliku iteratsioonimeetodi eeskiri  $x_n = g(x_{n-1})$  saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks**.

Newtoni meetod on ühesammuline meetod.

Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja alglähend  $x_0$  peab olema otsitavale lahendile  $x^*$  piisavalt lähedal.

Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus  $\gamma$  sõltub konstandist  $K$ .

ja hariliku iteratsioonimeetodi eeskiri  $x_n = g(x_{n-1})$  saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks**.

Newtoni meetod on ühesammuline meetod.

Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja algühend  $x_0$  peab olema otsitavale lahendile  $x^*$  piisavalt lähedal.

Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus  $\gamma$  sõltub konstandist  $K$ .

ja hariliku iteratsioonimeetodi eeskiri  $x_n = g(x_{n-1})$  saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks**.

Newtoni meetod on ühesammuline meetod.

Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja algühend  $x_0$  peab olema otsitavale lahendile  $x^*$  piisavalt lähedal.

Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus  $\gamma$  sõltub konstandist  $K$ .

ja hariliku iteratsioonimeetodi eeskiri  $x_n = g(x_{n-1})$  saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks**.

Newtoni meetod on ühesammuline meetod.

Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja alglähend  $x_0$  peab olema otsitavale lahendile  $x^*$  piisavalt lähedal.

Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus  $\gamma$  sõltub konstandist  $K$ .

**Näide** Lahendame eelmise näite võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  Newtoni meetodiga.

Meil  $f(x) = x^3 + 2x - 1$  ja  $f'(x) = 3x^2 + 2$ .

Newtoni meetod  $n$ -nda lähendi leidmiseks on seega

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 + 2x_{n-1} - 1}{3x_{n-1}^2 + 2} = \frac{2x_{n-1}^3 + 1}{3x_{n-1}^2 + 2}$$

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 2} \approx 0,4545$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 + 1}{3x_1^2 + 2} \approx 0,4534$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 + 1}{3x_2^2 + 2} \approx 0,4534$$

*Näide* Lahendame eelmise näite võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  Newtoni meetodiga.

Meil  $f(x) = x^3 + 2x - 1$  ja  $f'(x) = 3x^2 + 2$ .

Newtoni meetod  $n$ -nda lähendi leidmiseks on seega

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 + 2x_{n-1} - 1}{3x_{n-1}^2 + 2} = \frac{2x_{n-1}^3 + 1}{3x_{n-1}^2 + 2}$$

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 2} \approx 0,4545$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 + 1}{3x_1^2 + 2} \approx 0,4534$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 + 1}{3x_2^2 + 2} \approx 0,4534$$



# Modifitseeritud Newtoni meetod

Newtoni meetodi korral

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Alati ei ole võimalik leida tuletise väärtust või on see protsess liiga töömahukas. Selle vältimiseks võib kasutada Newtoni meetodi modifikatsioone. Lihtsaim neist:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Eeskiri on **modifitseeritud Newtoni meetod**. Meetod on ühesammuline iteratsioonimeetod ning koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

# Modifitseeritud Newtoni meetod

Newtoni meetodi korral

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Alati ei ole võimalik leida tuletise väärtust või on see protsess liiga töömahukas. Selle vältimiseks võib kasutada Newtoni meetodi modifikatsioone. Lihtsaim neist:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Eeskiri on **modifitseeritud Newtoni meetod**. Meetod on ühesammuline iteratsioonimeetod ning koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

# Modifitseeritud Newtoni meetod

Newtoni meetodi korral

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Alati ei ole võimalik leida tuletise väärtust või on see protsess liiga töömahukas. Selle vältimiseks võib kasutada Newtoni meetodi modifikatsioone. Lihtsaim neist:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Eeskiri on **modifitseeritud Newtoni meetod**. Meetod on ühesammuline iteratsioonimeetod ning koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

# Modifitseeritud Newtoni meetod

Newtoni meetodi korral

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Alati ei ole võimalik leida tuletise väärtust või on see protsess liiga töömahukas. Selle vältimiseks võib kasutada Newtoni meetodi modifikatsioone. Lihtsaim neist:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Eeskiri on **modifitseeritud Newtoni meetod**. Meetod on ühesammuline iteratsioonimeetod ning koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

# Lõikajate meetod

Teine võimalus Newtoni meetodit modifitseerida on tuletise lähendamine. Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kui  $\Delta x$  on väike, siis  $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Argumendi muudule  $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$  vastab funktsiooni muut  $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$  ning

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}.$$

# Lõikajate meetod

Teine võimalus Newtoni meetodit modifitseerida on tuletise lähendamine. Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kui  $\Delta x$  on väike, siis  $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Argumendi muudule  $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$  vastab funktsiooni muut  $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$  ning

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}.$$

# Lõikajate meetod

Teine võimalus Newtoni meetodit modifitseerida on tuletise lähendamine. Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kui  $\Delta x$  on väike, siis  $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Argumendi muudule  $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$  vastab funktsiooni muut  $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$  ning

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}.$$

# Lõikajate meetod

Teine võimalus Newtoni meetodit modifitseerida on tuletise lähendamine. Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kui  $\Delta x$  on väike, siis  $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Argumendi muudule  $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$  vastab funktsiooni muut  $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$  ning

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}.$$



Asendades leitud tuletise Newtoni meetodisse ning saame **lõikajate**  
**ehk kõõlude meetodi**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}).$$

Meetod on kahesammuline ja teatud eeldustel kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \beta |x_{n-1} - x^*|^{1,618},$$

kus  $\beta > 0$ .

Asendades leitud tuletise Newtoni meetodisse ning saame **lõikajate** ehk **kõõlude meetodi**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}).$$

Meetod on kahesammuline ja teatud eeldustel kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \beta |x_{n-1} - x^*|^{1,618},$$

kus  $\beta > 0$ .

Asendades leitud tuletise Newtoni meetodisse ning saame **lõikajate**  
**ehk kõõlude meetodi**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}).$$

Meetod on kahesammuline ja teatud eeldustel kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \beta |x_{n-1} - x^*|^{1,618},$$

kus  $\beta > 0$ .