

# Ligikaudne lahendamine

Paljude matemaatika rakendusülesannete lahendamise saab jagada kolmeks:

- matemaatilise mudeli koostamine;
- lihtsustatud versiooni lahendamine;
- täieliku mudeli lahendamine.

Sageli saame praktilistes arvutustes oma ülesandele ligikaudse lahendi ehk lähilahendi. Leitud väärtusel on praktiline tähtsus vaid siis, kui suudame garanteerida selle usaldatavuse ja küllaldase täpsuse.

# Ligikaudne lahendamine

Paljude matemaatika rakendusülesannete lahendamise saab jagada kolmeks:

- matemaatilise mudeli koostamine;
- lihtsustatud versiooni lahendamine;
- täieliku mudeli lahendamine.

Sageli saame praktilistes arvutustes oma ülesandele ligikaudse lahendi ehk lähilahendi. Leitud väärtusel on praktiline tähtsus vaid siis, kui suudame garanteerida selle usaldatavuse ja küllaldase täpsuse.

# Ligikaudne lahendamine

Paljude matemaatika rakendusülesannete lahendamise saab jagada kolmeks:

- matemaatilise mudeli koostamine;
- lihtsustatud versiooni lahendamine;
- täieliku mudeli lahendamine.

Sageli saame praktilistes arvutustes oma ülesandele ligikaudse lahendi ehk lähilahendi. Leitud väärtusel on praktiline tähtsus vaid siis, kui suudame garanteerida selle usaldatavuse ja küllaldase täpsuse.

# Ligikaudne lahendamine

Paljude matemaatika rakendusülesannete lahendamise saab jagada kolmeks:

- matemaatilise mudeli koostamine;
- lihtsustatud versiooni lahendamine;
- täieliku mudeli lahendamine.

Sageli saame praktilistes arvutustes oma ülesandele ligikaudse lahendi ehk lähilahendi. Leitud väärtusel on praktiline tähtsus vaid siis, kui suudame garanteerida selle usaldatavuse ja küllaldase täpsuse.

# Vigade liigid

- Matemaatilise formuleeringu viga  
Sellesse jaotusse kuuluvad näiteks ülesande algandmete vead.  
*Näide 1* Keha langeb Maa raskusväljas. Lihtsustatud mudelis, kus ei arvestata takistusjõude

$$F = mg.$$

Õhutakistuse korral

$$F = mg - kv^2.$$

# Vigade liigid

- Matemaatilise formuleeringu viga  
Sellesse jaotusse kuuluvad näiteks ülesande algandmete vead.  
*Näide 1* Keha langeb Maa raskusväljas. Lihtsustatud mudelis, kus ei arvestata takistusjõude

$$F = mg.$$

Õhutakistuse korral

$$F = mg - kv^2.$$

# Vigade liigid

- Matemaatilise formuleeringu viga  
Sellesse jaotusse kuuluvad näiteks ülesande algandmete vead.  
*Näide 1* Keha langeb Maa raskusväljas. Lihtsustatud mudelis, kus ei arvestata takistusjõude

$$F = mg.$$

Õhutakistuse korral

$$F = mg - kv^2.$$

# Vigade liigid

- Meetodi viga  
Matemaatiliste ülesannete lahendusmeetodid saab laias laastus jagada kaheks: *täpseteks* ja *ligikaudseteks* meetoditeks.
- Ümardamisvead  
*Näide 2*

$$654321 \cdot 654321 = 428135971041$$

Samas taskuarvutil leides oleks sama tehte vastuseks  $4,28135971 \cdot 10^{11}$ .



# Vigade liigid

- Meetodi viga  
Matemaatiliste ülesannete lahendusmeetodid saab laias laastus jagada kaheks: *täpseteks* ja *ligikaudseteks* meetoditeks.
- Ümardamisvead

*Näide 2*

$$654321 \cdot 654321 = 428135971041$$

Samas taskuarvutil leides oleks sama tehte vastuseks  $4,28135971 \cdot 10^{11}$ .

# Vigade liigid

- Meetodi viga  
Matemaatiliste ülesannete lahendusmeetodid saab laias laastus jagada kaheks: *täpseteks* ja *ligikaudseteks* meetoditeks.
- Ümardamisvead  
*Näide 2*

$$654321 \cdot 654321 = 428135971041$$

Samas taskuarvutil leides oleks sama tehte vastuseks  $4,28135971 \cdot 10^{11}$ .

# Vigade liigid

- **Aproksimeerimisvead**
- Teisendusvead

Matemaatilise formuleeringi ebatäpsus põhjustab nn *tingimatu vea*, mis ei sõltu lahendusmeetodist, arvutusvahenditest ega ka arvutajast. Meetodi veast, aproksimeerimis- ja ümardamisvigadest põhjustatud ebatäpsused moodustavad *tingliku vea*.  
Tingimatu viga+tinglik viga=täielik viga.

# Vigade liigid

- Aproximeerimisvead
- Teisendusvead

Matemaatilise formuleeringi ebatäpsus põhjustab nn *tingimatu vea*, mis ei sõltu lahendusmeetodist, arvutusvahenditest ega ka arvutajast. Meetodi veast, aproksimeerimis- ja ümardamisvigadest põhjustatud ebatäpsused moodustavad *tingliku vea*.  
Tingimatu viga+tinglik viga=täielik viga.

# Vigade liigid

- Aproximeerimisvead
- Teisendusvead

Matemaatilise formuleeringi ebatäpsus põhjustab nn *tingimatu vea*, mis ei sõltu lahendusmeetodist, arvutusvahenditest ega ka arvutajast. Meetodi veast, aproksimeerimis- ja ümardamisvigadest põhjustatud ebatäpsused moodustavad *tingliku vea*.  
Tingimatu viga+tinglik viga=täielik viga.

# Vigade liigid

- Aproximeerimisvead
- Teisendusvead

Matemaatilise formuleeringi ebatäpsus põhjustab nn *tingimatu vea*, mis ei sõltu lahendusmeetodist, arvutusvahenditest ega ka arvutajast. Meetodi veast, aproksimeerimis- ja ümardamisvigadest põhjustatud ebatäpsused moodustavad *tingliku vea*.

Tingimatu viga+tinglik viga=täielik viga.

# Vigade liigid

- Aproximeerimisvead
- Teisendusvead

Matemaatilise formuleeringi ebatäpsus põhjustab nn *tingimatu vea*, mis ei sõltu lahendusmeetodist, arvutusvahenditest ega ka arvutajast. Meetodi veast, aproksimeerimis- ja ümardamisvigadest põhjustatud ebatäpsused moodustavad *tingliku vea*.  
Tingimatu viga+tinglik viga=täielik viga.

# Absoluutne ja relatiivne viga

Olgu  $a$  arvu  $A$  ligikaudne väärtus.

Ligikaudse arvu  $a$  **tõeliseks veaks** nimetatakse suurust  $\Delta = a - A$ .

Ligikaudse arvu  $a$  **absoluutseks veaks** nimetatakse suvalist positiivset arvu  $\varepsilon$ , mis rahuldab võrratust

$$|\Delta| \leq \varepsilon \quad \text{ehk} \quad |a - A| \leq \varepsilon.$$



# Absoluutne ja relatiivne viga

Olgu  $a$  arvu  $A$  ligikaudne väärtus.

Ligikaudse arvu  $a$  **tõeliseks veaks** nimetatakse suurust  $\Delta = a - A$ .

Ligikaudse arvu  $a$  **absoluutseks veaks** nimetatakse suvalist positiivset arvu  $\varepsilon$ , mis rahuldab võrratust

$$|\Delta| \leq \varepsilon \quad \text{ehk} \quad |a - A| \leq \varepsilon.$$

# Absoluutne ja relatiivne viga

Ligikaudse arvu  $a$  **tõeliseks relatiivseks veaks** nimetatakse suurust

$$\eta = \frac{\Delta}{a}.$$

Ligikaudse arvu  $a$  **relatiivseks veaks** nimetatakse suvalist positiivset arvu  $\delta$ , mis rahuldab võrratust

$$|\eta| \leq \delta \quad \text{ehk} \quad \left| \frac{a - A}{a} \right| \leq \delta.$$

# Absoluutne ja relatiivne viga

Ligikaudse arvu  $a$  **tõeliseks relatiivseks veaks** nimetatakse suurust  $\eta = \frac{\Delta}{a}$ .

Ligikaudse arvu  $a$  **relatiivseks veaks** nimetatakse suvalist positiivset arvu  $\delta$ , mis rahuldab võrratust

$$|\eta| \leq \delta \quad \text{ehk} \quad \left| \frac{a - A}{a} \right| \leq \delta.$$

# Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni  $u = u(x_1, \dots, x_m)$  väärtus, kui argumentid  $x_1, \dots, x_m$  ei ole täpsed.

Olgu argumentide  $x_1, \dots, x_m$  ligikaudsed väärtused  $X_1, \dots, X_m$ .

Tõeline viga  $\Delta x_i = X_i - x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Siit  $X_i = x_i + \Delta x_i$  ning

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(X_1, \dots, X_m) - u(x_1, \dots, x_m) = \\ &= u(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

$$\Delta u \approx du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

# Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni  $u = u(x_1, \dots, x_m)$  väärtus, kui argumentid  $x_1, \dots, x_m$  ei ole täpsed.

Olgu argumentide  $x_1, \dots, x_m$  ligikaudsed väärtused  $X_1, \dots, X_m$ .

Tõeline viga  $\Delta x_i = X_i - x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Siit  $X_i = x_i + \Delta x_i$  ning

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(X_1, \dots, X_m) - u(x_1, \dots, x_m) = \\ &= u(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

$$\Delta u \approx du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

# Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni  $u = u(x_1, \dots, x_m)$  väärtus, kui argumentid  $x_1, \dots, x_m$  ei ole täpsed.

Olgu argumentide  $x_1, \dots, x_m$  ligikaudsed väärtused  $X_1, \dots, X_m$ .

Tõeline viga  $\Delta x_i = X_i - x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Siit  $X_i = x_i + \Delta x_i$  ning

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(X_1, \dots, X_m) - u(x_1, \dots, x_m) = \\ &= u(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

$$\Delta u \approx du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

# Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni  $u = u(x_1, \dots, x_m)$  väärtus, kui argumentid  $x_1, \dots, x_m$  ei ole täpsed.

Olgu argumentide  $x_1, \dots, x_m$  ligikaudsed väärtused  $X_1, \dots, X_m$ .

Tõeline viga  $\Delta x_i = X_i - x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Siit  $X_i = x_i + \Delta x_i$  ning

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(X_1, \dots, X_m) - u(x_1, \dots, x_m) = \\ &= u(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

$$\Delta u \approx du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

## Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni  $u = u(x_1, \dots, x_m)$  väärtus, kui argumentid  $x_1, \dots, x_m$  ei ole täpsed.

Olgu argumentide  $x_1, \dots, x_m$  ligikaudsed väärtused  $X_1, \dots, X_m$ .

Tõeline viga  $\Delta x_i = X_i - x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Siit  $X_i = x_i + \Delta x_i$  ning

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(X_1, \dots, X_m) - u(x_1, \dots, x_m) = \\ &= u(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

$$\Delta u \approx du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$



# Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni  $u = u(x_1, \dots, x_m)$  väärtus, kui argumentid  $x_1, \dots, x_m$  ei ole täpsed.

Olgu argumentide  $x_1, \dots, x_m$  ligikaudsed väärtused  $X_1, \dots, X_m$ .

Tõeline viga  $\Delta x_i = X_i - x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Siit  $X_i = x_i + \Delta x_i$  ning

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(X_1, \dots, X_m) - u(x_1, \dots, x_m) = \\ &= u(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

$$\Delta u \approx du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

# Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni  $u = u(x_1, \dots, x_m)$  väärtus, kui argumentid  $x_1, \dots, x_m$  ei ole täpsed.

Olgu argumentide  $x_1, \dots, x_m$  ligikaudsed väärtused  $X_1, \dots, X_m$ .

Tõeline viga  $\Delta x_i = X_i - x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Siit  $X_i = x_i + \Delta x_i$  ning

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(X_1, \dots, X_m) - u(x_1, \dots, x_m) = \\ &= u(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

$$\Delta u \approx du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Et  $x_j \approx X_j$ , siis pidevate osatuletiste  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  korral

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_m) \approx \frac{\partial u}{\partial X_j}(X_1, \dots, X_m).$$

Seega  $\Delta u \approx \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i$ .

Kui  $|\Delta x_j| \leq \varepsilon_{x_j}$ , siis

$$\begin{aligned} |\Delta u| &\approx \left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| |\Delta x_i| \leq \end{aligned}$$

Et  $x_j \approx X_j$ , siis pidevate osatuletiste  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  korral

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_m) \approx \frac{\partial u}{\partial X_j}(X_1, \dots, X_m).$$

Seega  $\Delta u \approx \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i$ .

Kui  $|\Delta x_j| \leq \varepsilon_{x_j}$ , siis

$$\begin{aligned} |\Delta u| &\approx \left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| |\Delta x_i| \leq \end{aligned}$$

Et  $x_j \approx X_j$ , siis pidevate osatuletiste  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  korral

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_m) \approx \frac{\partial u}{\partial X_j}(X_1, \dots, X_m).$$

Seega  $\Delta u \approx \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i$ .

Kui  $|\Delta x_j| \leq \varepsilon_{x_j}$ , siis

$$\begin{aligned} |\Delta u| &\approx \left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| |\Delta x_i| \leq \end{aligned}$$

Et  $x_j \approx X_j$ , siis pidevate osatuletiste  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  korral

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_m) \approx \frac{\partial u}{\partial X_j}(X_1, \dots, X_m).$$

Seega  $\Delta u \approx \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i$ .

Kui  $|\Delta x_j| \leq \varepsilon_{x_j}$ , siis

$$\begin{aligned} |\Delta u| &\approx \left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| |\Delta x_i| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse  $u$  **absoluutseks veaks** võtta

$$\varepsilon_u = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Vastavalt definitsioonile  $\delta_{x_i} = \frac{\varepsilon_{x_i}}{|X_i|}$  ja  $\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|}$ .

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|} = \frac{1}{|u(X_1, \dots, X_m)|} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i} =$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse  $u$  **absoluutseks veaks** võtta

$$\varepsilon_u = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Vastavalt definitsioonile  $\delta_{x_i} = \frac{\varepsilon_{x_i}}{|X_i|}$  ja  $\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|}$ .

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|} = \frac{1}{|u(X_1, \dots, X_m)|} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i} =$$



$$\leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse  $u$  **absoluutseks veaks** võtta

$$\varepsilon_u = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Vastavalt definitsioonile  $\delta_{x_i} = \frac{\varepsilon_{x_i}}{|X_i|}$  ja  $\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|}$ .

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|} = \frac{1}{|u(X_1, \dots, X_m)|} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i} =$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse  $u$  **absoluutseks veaks** võtta

$$\varepsilon_u = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Vastavalt definitsioonile  $\delta_{x_i} = \frac{\varepsilon_{x_i}}{|X_i|}$  ja  $\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|}$ .

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|} = \frac{1}{|u(X_1, \dots, X_m)|} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i} =$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse  $u$  **absoluutseks veaks** võtta

$$\varepsilon_u = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Vastavalt definitsioonile  $\delta_{x_i} = \frac{\varepsilon_{x_i}}{|X_i|}$  ja  $\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|}$ .

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|} = \frac{1}{|u(X_1, \dots, X_m)|} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i} =$$

$$= \frac{1}{|u(x_1, \dots, x_m)|} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) \right| |x_i| \delta_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse  $u$  **relatiivseks veaks** võtta

$$\delta_u = \frac{1}{|u(x_1, \dots, x_m)|} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) \right| |x_i| \delta_{x_i}.$$

$$= \frac{1}{|u(x_1, \dots, x_m)|} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) \right| |x_i| \delta_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse  $u$  **relatiivseks veaks** võtta

$$\delta_u = \frac{1}{|u(x_1, \dots, x_m)|} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) \right| |x_i| \delta_{x_i}.$$

# Mõned erijuhud

## Liitmine ja lahutamine

Olgu  $u = x_1 \pm x_2$ , siis

$$\varepsilon_U = \varepsilon_{X_1} + \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \frac{|X_1|\delta_{X_1} + |X_2|\delta_{X_2}}{|X_1 \pm X_2|}.$$

# Mõned erijuhud

## Liitmine ja lahutamine

Olgu  $u = x_1 \pm x_2$ , siis

$$\varepsilon_U = \varepsilon_{X_1} + \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \frac{|X_1|\delta_{X_1} + |X_2|\delta_{X_2}}{|X_1 \pm X_2|}.$$

# Mõned erijuhud

## Liitmine ja lahutamine

Olgu  $u = x_1 \pm x_2$ , siis

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2},$$

$$\delta_u = \frac{|X_1|\delta_{x_1} + |X_2|\delta_{x_2}}{|X_1 \pm X_2|}.$$



## Liitmine ja lahutamine

Olgu  $u = x_1 \pm x_2$ , siis

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2},$$

$$\delta_u = \frac{|X_1|\delta_{x_1} + |X_2|\delta_{x_2}}{|X_1 \pm X_2|}.$$

## Korrutamine ja jagamine

Olgu  $u = x_1 \cdot x_2$ , siis

$$\varepsilon_U = |X_2| \varepsilon_{X_1} + |X_1| \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

Olgu  $u = \frac{x_1}{x_2}$ , siis

$$\varepsilon_U = \frac{1}{|X_2|} \varepsilon_{X_1} + \frac{|X_1|}{|X_2|^2} \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

## Korrutamine ja jagamine

Olgu  $u = x_1 \cdot x_2$ , siis

$$\varepsilon_U = |X_2| \varepsilon_{X_1} + |X_1| \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

Olgu  $u = \frac{x_1}{x_2}$ , siis

$$\varepsilon_U = \frac{1}{|X_2|} \varepsilon_{X_1} + \frac{|X_1|}{|X_2|^2} \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

## Korrutamine ja jagamine

Olgu  $u = x_1 \cdot x_2$ , siis

$$\varepsilon_U = |X_2| \varepsilon_{X_1} + |X_1| \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

Olgu  $u = \frac{x_1}{x_2}$ , siis

$$\varepsilon_U = \frac{1}{|X_2|} \varepsilon_{X_1} + \frac{|X_1|}{|X_2|^2} \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

## Korrutamine ja jagamine

Olgu  $u = x_1 \cdot x_2$ , siis

$$\varepsilon_U = |X_2| \varepsilon_{X_1} + |X_1| \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

Olgu  $u = \frac{x_1}{x_2}$ , siis

$$\varepsilon_U = \frac{1}{|X_2|} \varepsilon_{X_1} + \frac{|X_1|}{|X_2|^2} \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

## Korrutamine ja jagamine

Olgu  $u = x_1 \cdot x_2$ , siis

$$\varepsilon_U = |X_2| \varepsilon_{X_1} + |X_1| \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

Olgu  $u = \frac{x_1}{x_2}$ , siis

$$\varepsilon_U = \frac{1}{|X_2|} \varepsilon_{X_1} + \frac{|X_1|}{|X_2|^2} \varepsilon_{X_2},$$

$$\delta_U = \delta_{X_1} + \delta_{X_2}.$$

# Võrrandite lahendamine

Vaatame võrrandite

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus  $f(x)$  on ühemuutuja funktsioon. Näiteks

$$2x + 4 = 0, \quad x = -2$$

$$3x^2 + 18x - 21 = 0, \quad x_1 = -7, \quad x_2 = 1$$

$$\sin x = 1, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

# Võrrandite lahendamine

Vaatame võrrandite

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus  $f(x)$  on ühemuutuja funktsioon. Näiteks

$$2x + 4 = 0, \quad x = -2$$

$$3x^2 + 18x - 21 = 0, \quad x_1 = -7, \quad x_2 = 1$$

$$\sin x = 1, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



## Definitsioon

Võrrandit  $f(x) = 0$  nimetatakse algebraliseks võrrandiks, kui  $f(x)$  on algebraline avaldis (st arvud, tähed on omavahel seotud liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise, täisarvulise astendamise ja juurimise abil).

## Definitsioon

Võrrandit  $f(x) = 0$  nimetatakse transtsendentseks võrrandiks, kui  $f(x)$  sisaldab transtsendentseid funktsioone (st eksponent- või logaritmifunktsioone, trigonomeetrilisi funktsioone ja nende pöördfunktsioone).

## Definitsioon

Võrrandit  $f(x) = 0$  nimetatakse algebraliseks võrrandiks, kui  $f(x)$  on algebraline avaldis (st arvud, tähed on omavahel seotud liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise, täisarvulise astendamise ja juurimise abil).

## Definitsioon

Võrrandit  $f(x) = 0$  nimetatakse transtsendentseks võrrandiks, kui  $f(x)$  sisaldab transtsendentseid funktsioone (st eksponent- või logaritmifunktsioone, trigonomeetrilisi funktsioone ja nende pöördfunktsioone).

## Definitsioon

*Kaht võrrandit nimetatakse samaväärseteks, kui esimese võrrandi iga lahend osutub teise võrrandi lahendiks ja vastupidi: teise võrrandi iga lahend on esimese võrrandi lahendiks.*

## Definitsioon

*Arvu  $x^*$  nimetatakse võrrandi  $f(x) = 0$  lahendiks (funktsiooni  $f(x)$  nullkohaks), kui*

$$f(x^*) \equiv 0.$$

## Definitsioon

*Arvu  $x^*$  nimetatakse võrrandi  $f(x) = 0$   $k$ –kordseks lahendiks, kui*

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

## Definitsioon

*Kaht võrrandit nimetatakse samaväärseteks, kui esimese võrrandi iga lahend osutub teise võrrandi lahendiks ja vastupidi: teise võrrandi iga lahend on esimese võrrandi lahendiks.*

## Definitsioon

*Arvu  $x^*$  nimetatakse võrrandi  $f(x) = 0$  lahendiks (funktsiooni  $f(x)$  nullkohaks), kui*

$$f(x^*) \equiv 0.$$

## Definitsioon

*Arvu  $x^*$  nimetatakse võrrandi  $f(x) = 0$   $k$ –kordseks lahendiks, kui*

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

## Definitsioon

*Kaht võrrandit nimetatakse samaväärseteks, kui esimese võrrandi iga lahend osutub teise võrrandi lahendiks ja vastupidi: teise võrrandi iga lahend on esimese võrrandi lahendiks.*

## Definitsioon

*Arvu  $x^*$  nimetatakse võrrandi  $f(x) = 0$  lahendiks (funktsiooni  $f(x)$  nullkohaks), kui*

$$f(x^*) \equiv 0.$$

## Definitsioon

*Arvu  $x^*$  nimetatakse võrrandi  $f(x) = 0$   $k$ -kordseks lahendiks, kui*

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglahend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglahendit).

2) täpsustatakse alglahendit nõutava täpsuseni.

**Alglahendi leidmine** Alglahendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglahend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglahendit).

2) täpsustatakse alglahendit nõutava täpsuseni.

**Alglahendi leidmine** Alglahendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.



Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.

Enamus võrrandi  $f(x) = 0$  ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:

1) leitakse alglähend  $x_0$ , milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).

2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

**Alglähendi leidmine** Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

## Graafiline meetod

Mõnedel juhtudel on mõtekas võrrand  $f(x) = 0$  kirjutada ümber kujule  $f_1(x) = f_2(x)$  ning joonistada kahe funktsiooni  $y = f_1(x)$  ja  $y = f_2(x)$  graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku algläheni.

*Näide 3* Näiteks võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  võib kirjutada kujul  $x^3 = 1 - 2x$  ja siit joonistada  $y = x^3$  ja  $y = 1 - 2x$  graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta  $0,4 \sim 0,5$ .

## Graafiline meetod

Mõnedel juhtudel on mõttekas võrrand  $f(x) = 0$  kirjutada ümber kujule  $f_1(x) = f_2(x)$  ning joonistada kahe funktsiooni  $y = f_1(x)$  ja  $y = f_2(x)$  graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglahendi.

*Näide 3* Näiteks võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  võib kirjutada kujul  $x^3 = 1 - 2x$  ja siit joonistada  $y = x^3$  ja  $y = 1 - 2x$  graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglahendiks võtta  $0,4 \sim 0,5$ .

## Graafiline meetod

Mõnedel juhtudel on mõtekas võrrand  $f(x) = 0$  kirjutada ümber kujule  $f_1(x) = f_2(x)$  ning joonistada kahe funktsiooni  $y = f_1(x)$  ja  $y = f_2(x)$  graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglahendi.

*Näide 3* Näiteks võrrandi  $x^3 + 2x - 1 = 0$  võib kirjutada kujul  $x^3 = 1 - 2x$  ja siit joonistada  $y = x^3$  ja  $y = 1 - 2x$  graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglahendiks võtta  $0,4 \sim 0,5$ .

## *Tabel*

Kui  $f(x)$  on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.

Meie näite puhul  $f(0,4) = -0,136$  ja  $f(0,5) = 0,125$ .

## *Tabel*

Kui  $f(x)$  on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.

Meie näite puhul  $f(0,4) = -0,136$  ja  $f(0,5) = 0,125$ .



## *Tabel*

Kui  $f(x)$  on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.

Meie näite puhul  $f(0,4) = -0,136$  ja  $f(0,5) = 0,125$ .

## *Poolitamismeetod*

Selle korral arvutatakse funktsiooni  $f(x)$  väärtus lõigu  $[x_0, x_1]$  keskpunktis  $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ . Edasi võetakse vaatluse alla see poollõik, mille otstes on funktsiooni väärtustel erinev väärtus (seal asub vähemalt üks võrrandi  $f(x) = 0$  lahend) ja arvutatakse funktsiooni väärtus poollõigu keskpunktis. Valitakse uus poollõik ja korratakse protseduuri, kuni saame lähendile piisavalt täpsed tõkked.

### *Poolitamismeetod*

Selle korral arvutatakse funktsiooni  $f(x)$  väärtus lõigu  $[x_0, x_1]$  keskpunktis  $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ . Edasi võetakse vaatluse alla see poollõik, mille otstes on funktsiooni väärtustel erinev väärtus (seal asub vähemalt üks võrrandi  $f(x) = 0$  lahend) ja arvutatakse funktsiooni väärtus poollõigu keskpunktis. Valitakse uus poollõik ja korratakse protseduuri, kuni saame lähendile piisavalt täpsed tõkked.