

# Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus  $x_0$  ja  $u_0$  on etteantud suurused ning  $x \in \mathbb{R}$ . Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed  $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  ja otsitakse ülesande lahendi  $u$  lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve  $u_1, u_2, u_3, \dots$  nii, et  $u_j \approx u(x_j)$ .

# Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus  $x_0$  ja  $u_0$  on etteantud suurused ning  $x \in \mathbb{R}$ . Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed  $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  ja otsitakse ülesande lahendi  $u$  lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve  $u_1, u_2, u_3, \dots$  nii, et  $u_i \approx u(x_i)$ .

Olgu võrk ühtlane, st  $x_i - x_{i-1} = h$ ,  $i = 1, 2, \dots$

*Euleri meetod*

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata  $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$ .

### Teoreem

*Kui funktsiooni  $f$  esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$  korral rahuldab  $u_{i+1}$  hinnangut*

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i \max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

*iga  $i = 0, 1, \dots$  korral, kus  $C_i = e^{K(x_{i+1}-x_0)}$  ja  $K$  on funktsioonist  $f$  sõltuv konstant.*

Olgu võrk ühtlane, st  $x_i - x_{i-1} = h$ ,  $i = 1, 2, \dots$

*Euleri meetod*

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata  $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$ .

**Teoreem**

*Kui funktsiooni  $f$  esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$  korral rahuldab  $u_{i+1}$  hinnangut*

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i \max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

*iga  $i = 0, 1, \dots$  korral, kus  $C_i = e^{K(x_{i+1}-x_0)}$  ja  $K$  on funktsioonist  $f$  sõltuv konstant.*

Olgu võrk ühtlane, st  $x_i - x_{i-1} = h$ ,  $i = 1, 2, \dots$

*Euleri meetod*

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata  $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$ .

Teoreem

*Kui funktsiooni  $f$  esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$  korral rahuldab  $u_{i+1}$  hinnangut*

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i \max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

*iga  $i = 0, 1, \dots$  korral, kus  $C_i = e^{K(x_{i+1}-x_0)}$  ja  $K$  on funktsioonist  $f$  sõltuv konstant.*

Olgu võrk ühtlane, st  $x_i - x_{i-1} = h$ ,  $i = 1, 2, \dots$

*Euleri meetod*

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata  $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$ .

### Teoreem

*Kui funktsiooni  $f$  esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$  korral rahuldab  $u_{i+1}$  hinnangut*

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i \max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

*iga  $i = 0, 1, \dots$  korral, kus  $C_i = e^{K(x_{i+1}-x_0)}$  ja  $K$  on funktsioonist  $f$  sõltuv konstant.*

## *Trapetsvalemi meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega  $Ch^3$ .

## *Prognoosi-korreksiooni meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

## *Trapetsvalemi meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega  $Ch^3$ .

## *Prognoosi-korreksiooni meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.



## *Trapetsvalemi meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega  $Ch^3$ .

## *Prognoosi-korreksiooni meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

## *Trapetsvalemi meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega  $Ch^3$ .

## *Prognoosi-korreksiooni meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

## *Trapetsvalemi meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega  $Ch^3$ .

## *Prognoosi-korreksiooni meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

### *Trapetsvalemi meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega  $Ch^3$ .

### *Prognoosi-korreksiooni meetod*

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

## Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on  $O(h^3)$ .

## Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$  on konstandid.

Kui  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  ja  $\alpha = \beta = 1$ , siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

## *Keskpunkti meetod*

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on  $O(h^3)$ .

## *Runge-Kutta meetod*

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$  on konstandid.

Kui  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  ja  $\alpha = \beta = 1$ , siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

## *Keskpunkti meetod*

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on  $O(h^3)$ .

## *Runge-Kutta meetod*

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$  on konstandid.

Kui  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  ja  $\alpha = \beta = 1$ , siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

## *Keskpunkti meetod*

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on  $O(h^3)$ .

## *Runge-Kutta meetod*

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$  on konstandid.

Kui  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  ja  $\alpha = \beta = 1$ , siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.



## *Keskpunkti meetod*

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on  $O(h^3)$ .

## *Runge-Kutta meetod*

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$  on konstandid.

Kui  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  ja  $\alpha = \beta = 1$ , siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

## *Keskpunkti meetod*

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on  $O(h^3)$ .

## *Runge-Kutta meetod*

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$  on konstandid.

Kui  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  ja  $\alpha = \beta = 1$ , siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

## Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui  $u_i = u(x_i)$ , siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - c_2\alpha \right) f_x + \left( \frac{1}{2} - c_2\beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

## Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui  $u_i = u(x_i)$ , siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - c_2 \alpha \right) f_x + \left( \frac{1}{2} - c_2 \beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui  $u_i = u(x_i)$ , siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - c_2 \alpha \right) f_x + \left( \frac{1}{2} - c_2 \beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui  $u_i = u(x_i)$ , siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - c_2 \alpha \right) f_x + \left( \frac{1}{2} - c_2 \beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui  $u_i = u(x_i)$ , siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - c_2 \alpha \right) f_x + \left( \frac{1}{2} - c_2 \beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui  $u_i = u(x_i)$ , siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - c_2 \alpha \right) f_x + \left( \frac{1}{2} - c_2 \beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$



Kui kehtib

$$c_2 = 1 - c_1,$$
$$\alpha = \beta = \frac{1}{2(1 - c_1)},$$

siis on tegu II järku Runge-Kutta meetodiga.

## $k$ -järku Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 F_1 + c_2 F_2 + \dots + c_k F_k,$$

kus

$$F_1 = hf(x_i, u_i),$$

$$F_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, u_i + \beta_{21} F_1),$$

$$F_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, u_i + \beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2),$$

...

$$F_k = hf(x_i + \alpha_k h, u_i + \beta_{k1} F_1 + \beta_{k2} F_2 + \dots + \beta_{k,k-1} F_{k-1}).$$

# Adamsi meetodid

*Adams-Bashforthi meetod*

Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx.$$

Asendame funktsiooni  $f(x, u(x))$  selle interpolandi  $\Phi_k(x)$ , kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \dots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x) dx.$$

# Adamsi meetodid

## Adams-Bashforthi meetod

Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx.$$

Asendame funktsiooni  $f(x, u(x))$  selle interpolandi  $\Phi_k(x)$ , kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \dots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x) dx.$$

# Adamsi meetodid

*Adams-Bashforthi meetod*

Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx.$$

Asendame funktsiooni  $f(x, u(x))$  selle interpolandi  $\Phi_k(x)$ , kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \dots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x) dx.$$

# Adamsi meetodid

*Adams-Bashforthi meetod*

Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx.$$

Asendame funktsiooni  $f(x, u(x))$  selle interpolandi  $\Phi_k(x)$ , kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \dots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x) dx.$$

# Adamsi meetodid

*Adams-Bashforthi meetod*

Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx.$$

Asendame funktsiooni  $f(x, u(x))$  selle interpolandi  $\Phi_k(x)$ , kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \dots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x) dx.$$

# Adamsi meetodid

*Adams-Bashforthi meetod*

Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx.$$

Asendame funktsiooni  $f(x, u(x))$  selle interpolandi  $\Phi_k(x)$ , kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \dots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x) dx.$$



# Adamsi meetodid

*Adams-Bashforthi meetod*

Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx.$$

Asendame funktsiooni  $f(x, u(x))$  selle interpolandi  $\Phi_k(x)$ , kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \dots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x) dx.$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

*Adams-Moultoni meetod*

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni  $f(x, u(x))$  lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes  $x_{i-k+1}, \dots, x_{i+1}$ . Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

### *Adams-Moultoni meetod*

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni  $f(x, u(x))$  lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes  $x_{i-k+1}, \dots, x_{i+1}$ . Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

### *Adams-Moultoni meetod*

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni  $f(x, u(x))$  lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes  $x_{i-k+1}, \dots, x_{i+1}$ . Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

### *Adams-Moultoni meetod*

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni  $f(x, u(x))$  lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes  $x_{i-k+1}, \dots, x_{i+1}$ . Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

### *Adams-Moultoni meetod*

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni  $f(x, u(x))$  lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes  $x_{i-k+1}, \dots, x_{i+1}$ . Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

### *Adams-Moultoni meetod*

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni  $f(x, u(x))$  lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes  $x_{i-k+1}, \dots, x_{i+1}$ . Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektiooni skeemidega.

# HDV süsteemide lahendamine

Vaatame HDVS

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) \\ \dots \\ u_m'(x) = f_m(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) \end{cases}$$

Cauchy ülesande saamiseks lisame algtingimused

$$\begin{cases} u_1(x_0) = u_0^1 \\ u_2(x_0) = u_0^2 \\ \dots \\ u_m(x_0) = u_0^m. \end{cases}$$



# HDV süsteemide lahendamine

Vaatame HDVS

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) \\ \dots \\ u_m'(x) = f_m(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) \end{cases}$$

Cauchy ülesande saamiseks lisame algtingimused

$$\begin{cases} u_1(x_0) = u_0^1 \\ u_2(x_0) = u_0^2 \\ \dots \\ u_m(x_0) = u_0^m. \end{cases}$$

# HDV süsteemide lahendamine

Vaatame HDVS

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) \\ \dots \\ u_m'(x) = f_m(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) \end{cases}$$

Cauchy ülesande saamiseks lisame algtingimused

$$\begin{cases} u_1(x_0) = u_0^1 \\ u_2(x_0) = u_0^2 \\ \dots \\ u_m(x_0) = u_0^m. \end{cases}$$

Euleri meetod sellise süsteemi lahendamiseks

$$\begin{cases} u_1^{i+1} = u_1^i + hf_1(x_i, u_1^i, u_2^i, \dots, u_m^i) \\ \dots \\ u_m^{i+1} = u_m^i + hf_m(x_i, u_1^i, u_2^i, \dots, u_m^i) \end{cases}$$

Süsteemi lahendamiseks saab kasutada ka teisi HDV lahendamismeetodeid .