Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja u_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathbb{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve $u_1, u_2, u_3, \dots$ nii, et $u_i \approx u(x_i)$.

Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja u_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathbb{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve u_1, u_2, $u_3, \dots$ nii, et $u_i \approx u(x_i)$.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.

Adamsi meetodid

Adams-Bashforthi meetod
Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx.$$

Asendame funktsiooni $f(x, u(x))$ selle interpolandi $\Phi_k(x)$, kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j}), \;\; j = 0, \dots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x)dx.$$

Adamsi meetodid

Adams-Bashforthi meetod

Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx.$$

Asendame funktsiooni $f(x, u(x))$ selle interpolandi $\Phi_k(x)$, kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j}), \;\; j = 0, \ldots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x)dx.$$

Adamsi meetodid

Adams-Bashforthi meetod
Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx.$$

Asendame funktsiooni $f(x, u(x))$ selle interpolandi $\Phi_k(x)$, kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \ldots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x)dx.$$

Adamsi meetodid

Adams-Bashforthi meetod
Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx.$$

Asendame funktsiooni $f(x, u(x))$ selle interpolandi $\Phi_k(x)$, kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \ldots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x)dx.$$

Adamsi meetodid

Adams-Bashforthi meetod
Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx.$$

Asendame funktsiooni $f(x, u(x))$ selle interpolandi $\Phi_k(x)$, kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j})), \quad j = 0, \ldots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x)dx.$$

Adamsi meetodid

Adams-Bashforthi meetod
Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx.$$

Asendame funktsiooni $f(x, u(x))$ selle interpolandi $\Phi_k(x)$, kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j}), \ \ j = 0, \dots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x)dx.$$

Adamsi meetodid

Adams-Bashforthi meetod
Diferentsiaalvõrrandi

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

integreerimisel saime

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx.$$

Asendame funktsiooni $f(x, u(x))$ selle interpolandi $\Phi_k(x)$, kus

$$f(x, u(x)) = \Phi_k(x) + E_k(x),$$

$$\Phi_k(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, u(x_{i-j}), \;\; j = 0, \ldots, k.$$

Seega saame

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_k(x)dx.$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni $f(x, u(x))$ lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes $x_{i-k+1}, \ldots, x_{i+1}$. Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{\hat{k},j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektsiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni $f(x, u(x))$ lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes $x_{i-k+1}, \ldots, x_{i+1}$. Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \hat{\gamma_{k,j}} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektsiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni $f(x, u(x))$ lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes $x_{i-k+1}, \ldots, x_{i+1}$. Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \hat{\gamma_{k,j}} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektsiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni $f(x, u(x))$ lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes $x_{i-k+1}, \ldots, x_{i+1}$. Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \hat{\gamma_{k,j}} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektsiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni $f(x, u(x))$ lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes $x_{i-k+1}, \ldots, x_{i+1}$. Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{\hat{k},j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektsiooni skeemidega.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u(x_{i-j})) + R_k.$$

Siit

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

Meetodi tuletuskäik sarnaneb Adams-Bashforthi meetodile, erinevus seisneb funktsiooni $f(x, u(x))$ lähendamises. Nüüd interpoleerime sõlmedes $x_{i-k+1}, \ldots, x_{i+1}$. Saame

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{\hat{k},j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Meetod on ilmutamata meetod. Töö mahtu on võimalik vähendada prognoosi-korrektsiooni skeemidega.

HDV süsteemide lahendamine

Vaatame HDVS

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)) \\ \ldots \\ u_m'(x) = f_m(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)) \end{cases}$$

Cauchy ülesande saamiseks lisame algtingimused

$$\begin{cases} u_1(x_0) = u_0^1 \\ u_2(x_0) = u_0^2 \\ \ldots \\ u_m(x_0) = u_0^m. \end{cases}$$

HDV süsteemide lahendamine

Vaatame HDVS

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)) \\ \ldots \\ u_m'(x) = f_m(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)) \end{cases}$$

Cauchy ülesande saamiseks lisame algtingimused

$$\begin{cases} u_1(x_0) = u_0^1 \\ u_2(x_0) = u_0^2 \\ \ldots \\ u_m(x_0) = u_0^m. \end{cases}$$

HDV süsteemide lahendamine

Vaatame HDVS

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)) \\ \ldots \\ u_m'(x) = f_m(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)) \end{cases}$$

Cauchy ülesande saamiseks lisame algtingimused

$$\begin{cases} u_1(x_0) = u_0^1 \\ u_2(x_0) = u_0^2 \\ \ldots \\ u_m(x_0) = u_0^m. \end{cases}$$

Euleri meetod sellise süsteemi lahendamiseks

$$\begin{cases} u_1^{i+1} = u_1^i + hf_1(x_i, u_1^i, u_2^i, \ldots, u_m^i) \\ \ldots \\ u_m^{i+1} = u_m^i + hf_m(x_i, u_1^i, u_2^i, \ldots, u_m^i) \end{cases}$$

Süsteemi lahendamiseks saab kasutada ka teisi HDV lahendamismeetodeid .