

Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine

ligikaudne arvutamine

Valemeid $\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots, dx_n$ arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid. Nii saab näiteks integraali

$$\int_D \int f(x, y) dx dy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ korral esitada

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine

ligikaudne arvutamine

Valemeid $\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots, dx_n$ arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid. Nii saab näiteks integraali

$$\int_D \int f(x, y) dx dy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ korral esitada

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine

ligikaudne arvutamine

Valemeid $\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots, dx_n$ arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid. Nii saab näiteks integraali

$$\int_D \int f(x, y) dx dy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ korral esitada

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine

ligikaudne arvutamine

Valemeid $\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots, dx_n$ arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid. Nii saab näiteks integraali

$$\int_D \int f(x, y) dx dy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ korral esitada

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Kasutades kaks korda trapetsvalemit, saame ligikaudse valemi

$$\int_D \int f(x, y) dx dy \approx$$

$$\begin{aligned} \approx & \frac{h\tau}{4} [f(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_1) + \dots + 2f(x_0, y_{m-1}) + f(x_0, y_m) + \\ & + 2f(x_1, y_0) + 4f(x_1, y_1) + \dots + 4f(x_1, y_{m-1}) + 2f(x_1, y_m) + \dots + \\ & + 2f(x_{n-1}, y_0) + 4f(x_{n-1}, y_1) + \dots + 4f(x_{n-1}, y_{m-1}) + 2f(x_{n-1}, y_m) + \\ & + f(x_n, y_0) + 2f(x_n, y_1) + \dots + 2f(x_n, y_{m-1}) + f(x_n, y_m)], \end{aligned}$$

kus h on sammupikkus $[a; b]$ ning τ on sammupikkus $[c; d]$. Ligikaudsel arvutamisel on vaja leida funktsiooni väärtus $(n+1)(m+1)$ sõlmes.

Kasutades kaks korda trapetsvalemit, saame ligikaudse valemi

$$\int_D \int f(x, y) dx dy \approx$$

$$\begin{aligned} \approx & \frac{h\tau}{4} [f(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_1) + \dots + 2f(x_0, y_{m-1}) + f(x_0, y_m) + \\ & + 2f(x_1, y_0) + 4f(x_1, y_1) + \dots + 4f(x_1, y_{m-1}) + 2f(x_1, y_m) + \dots + \\ & + 2f(x_{n-1}, y_0) + 4f(x_{n-1}, y_1) + \dots + 4f(x_{n-1}, y_{m-1}) + 2f(x_{n-1}, y_m) + \\ & + f(x_n, y_0) + 2f(x_n, y_1) + \dots + 2f(x_n, y_{m-1}) + f(x_n, y_m)], \end{aligned}$$

kus h on sammupikkus $[a; b]$ ning τ on sammupikkus $[c; d]$. Ligikaudsel arvutamisel on vaja leida funktsiooni väärtus $(n + 1)(m + 1)$ sõlmes.

Kasutades kaks korda trapetsvalemit, saame ligikaudse valemi

$$\int_D \int f(x, y) dx dy \approx$$

$$\begin{aligned} \approx & \frac{h\tau}{4} [f(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_1) + \dots + 2f(x_0, y_{m-1}) + f(x_0, y_m) + \\ & + 2f(x_1, y_0) + 4f(x_1, y_1) + \dots + 4f(x_1, y_{m-1}) + 2f(x_1, y_m) + \dots + \\ & + 2f(x_{n-1}, y_0) + 4f(x_{n-1}, y_1) + \dots + 4f(x_{n-1}, y_{m-1}) + 2f(x_{n-1}, y_m) + \\ & + f(x_n, y_0) + 2f(x_n, y_1) + \dots + 2f(x_n, y_{m-1}) + f(x_n, y_m)], \end{aligned}$$

kus h on sammupikkus $[a; b]$ ning τ on sammupikkus $[c; d]$. Ligikaudsel arvutamisel on vaja leida funktsiooni väärtus $(n + 1)(m + 1)$ sõlmes.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk N^2 sõlmes.

Olgu piirkond D N -mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.

Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskvaartuse saab leida

$$Ef(x) = \int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk N^2 sõlmes.

Olgu piirkond D N -mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.

Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskvaartuse saab leida

$$Ef(x) = \int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk N^2 sõlmes.

Olgu piirkond D N -mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.

Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväertuse saab leida

$$Ef(x) = \int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärg N^2 sõlmes.

Olgu piirkond D N -mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega. Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskvaertuse saab leida

$$Ef(x) = \int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk N^2 sõlmes.

Olgu piirkond D N -mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.

Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväertuse saab leida

$$Ef(x) = \int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärg N^2 sõlmes.

Olgu piirkond D N -mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.

Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväertuse saab leida

$$Ef(x) = \int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärg N^2 sõlmes.

Olgu piirkond D N -mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.

Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskvärtuse saab leida

$$Ef(x) = \int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk N^2 sõlmes.

Olgu piirkond D N -mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.

Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväertuse saab leida

$$Ef(x) = \int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$.

Suuruse $f(x)$ statistiline keskvärtus

$$E_{stat}f(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\tilde{X}^i).$$

Kui keskvärtus asendada statistilise keskvärtusega, siis

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\tilde{X}^i).$$

Suuruse $f(x)$ statistiline keskvärtus

$$E_{stat}f(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\tilde{X}^i).$$

Kui keskvärtus asendada statistilise keskvärtusega, siis

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\tilde{X}^i).$$

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.

1. järku HDV **üldkuju** on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0,$$

kus $F(x; u; v)$ on kolme muutuja funktsioon.

1. järku HDV **normaalkuju** järgmine:

$$u' = f(x, u),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.

1. järku HDV **üldkuju** on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0,$$

kus $F(x; u; v)$ on kolme muutuja funktsioon.

1. järku HDV **normaalkuju** järgmine:

$$u' = f(x, u),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.

1. järku HDV **üldkuju** on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0,$$

kus $F(x; u; v)$ on kolme muutuja funktsioon.

1. järku HDV **normaalkuju** järgmine:

$$u' = f(x, u),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.

1. järku HDV **üldkuju** on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0,$$

kus $F(x; u; v)$ on kolme muutuja funktsioon.

1. järku HDV **normaalkuju** järgmine:

$$u' = f(x, u),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.

1. järku HDV **üldkuju** on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0,$$

kus $F(x; u; v)$ on kolme muutuja funktsioon.

1. järku HDV **normaalkuju** järgmine:

$$u' = f(x, u),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid.

Vaatleme normaalkujulist I-järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub ühest parameetrist C . Selle määramiseks on vaja lisada sellele võrrandile lisatingimus.

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid.

Vaatleme normaalkujulist I-järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub ühest parameetrist C . Selle määramiseks on vaja lisada sellele võrrandile lisatingimus.

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid.

Vaatleme normaalkujulist I-järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub ühest parameetrist C . Selle määramiseks on vaja lisada sellele võrrandile lisatingimus.

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid.

Vaatleme normaalkujulist I-järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub ühest parameetrist C . Selle määramiseks on vaja lisada sellele võrrandile lisatingimus.

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid.

Vaatleme normaalkujulist I-järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub ühest parameetrist C . Selle määramiseks on vaja lisada sellele võrrandile lisatingimus.

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.

Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja u_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathbb{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve u_1, u_2, u_3, \dots nii, et $u_j \approx u(x_j)$.

Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja u_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathbb{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve u_1, u_2, u_3, \dots nii, et $u_i \approx u(x_i)$.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h, i = 1, 2, \dots$

Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Teoreem

Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud u_1, u_2, \dots, u_{i+1} korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i \max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \dots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1}-x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \dots$

Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Teoreem

Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud u_1, u_2, \dots, u_{i+1} korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i \max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \dots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1}-x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \dots$

Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Teoreem

Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud u_1, u_2, \dots, u_{i+1} korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i \max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \dots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1}-x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h, i = 1, 2, \dots$

Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Teoreem

Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud u_1, u_2, \dots, u_{i+1} korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i \max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \dots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1}-x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3 .

Prognoosi-korreksiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3 .

Prognoosi-korreksiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3 .

Prognoosi-korreksiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3 .

Prognoosi-korreksiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3 .

Prognoosi-korreksiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3 .

Prognoosi-korreksiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(x_i, u_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)).$$

Meetod on teist järku.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.

Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus c_1 , c_2 , α ja β on konstandid.

Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.

Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus c_1 , c_2 , α ja β on konstandid.

Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.

Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus c_1 , c_2 , α ja β on konstandid.

Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.

Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus c_1 , c_2 , α ja β on konstandid.

Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.

Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus c_1 , c_2 , α ja β on konstandid.

Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.

Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)),$$

kus c_1 , c_2 , α ja β on konstandid.

Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korreksiooni meetodi.

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - c_2 \alpha \right) f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2 \beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - c_2\alpha \right) f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2\beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - c_2\alpha \right) f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2\beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - c_2 \alpha \right) f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2 \beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - c_2 \alpha \right) f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2 \beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) - u_{i+1} &= \\ &= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) - \\ &\quad - u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] = \\ &= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - c_2 \alpha \right) f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2 \beta \right) ff_u \right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Kui kehtib

$$c_2 = 1 - c_1,$$
$$\alpha = \beta = \frac{1}{2(1 - c_1)},$$

siis on tegu II järku Runge-Kutta meetodiga.

k -järku Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 F_1 + c_2 F_2 + \dots + c_k F_k,$$

kus

$$F_1 = hf(x_i, u_i),$$

$$F_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, u_i + \beta_{21} F_1),$$

$$F_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, u_i + \beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2),$$

...

$$F_k = hf(x_i + \alpha_k h, u_i + \beta_{k1} F_1 + \beta_{k2} F_2 + \dots + \beta_{k,k-1} F_{k-1}).$$

Adams-Bashforthi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Adams-Bashforthi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Adams-Bashforthi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Adams-Bashforthi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \hat{\gamma}_{k,j} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$