Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine ligikaudne arvutamine

Valemeid $\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots, dx_n$ arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid. Nii saab näiteks integraali

$$\int_D\int f(x, y)dxdy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \le x \le b; c \le y \le d\}$ korral esitada

$$\int_D\int f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine ligikaudne arvutamine

Valemeid $\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots, dx_n$ arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid. Nii saab näiteks integraali

$$\int_D \int f(x, y) dx dy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ korral esitada

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine ligikaudne arvutamine

Valemeid $\int\int_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots, dx_n$ arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid. Nii saab näiteks integraali

$$\int_D \int f(x, y) dxdy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ korral esitada

$$\int_D \int f(x, y) dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine ligikaudne arvutamine

Valemeid $\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots, dx_n$ arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid. Nii saab näiteks integraali

$$\int_D \int f(x, y) dx dy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \le x \le b; c \le y \le d\}$ korral esitada

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Kasutades kaks korda trapetsvalemit, saame ligikaudse valemi

$$\int_D\int f(x,y)dxdy \approx$$

$$\approx \frac{h\tau}{4}\left[f(x_0,y_0)+2f(x_0,y_1)+\ldots+2f(x_0,y_{m-1})+f(x_0,y_m)+\right.$$

$$+2f(x_1,y_0)+4f(x_1,y_1)+\ldots+4f(x_1,y_{m-1})+2f(x_1,y_m)+\ldots+$$

$$+2f(x_{n-1},y_0)+4f(x_{n-1},y_1)+\ldots+4f(x_{n-1},y_{m-1})+2f(x_{n-1},y_m)+$$

$$\left.+f(x_n,y_0)+2f(x_n,y_1)+\ldots+2f(x_n,y_{m-1})+f(x_n,y_m)\right],$$

kus h on sammupikkus $[a;b]$ ning τ on sammupikkus $[c;d.]$ Ligikaudsel arvutamisel on vaja leida funktsiooni väärtus $(n+1)(m+1)$ sõlmes.

Kasutades kaks korda trapetsvalemit, saame ligikaudse valemi

$$\int_D\int f(x,y)dxdy \approx$$

$$\approx \frac{h\tau}{4}\left[f(x_0,y_0)+2f(x_0,y_1)+\ldots+2f(x_0,y_{m-1})+f(x_0,y_m)+\right.$$

$$+2f(x_1,y_0)+4f(x_1,y_1)+\ldots+4f(x_1,y_{m-1})+2f(x_1,y_m)+\ldots+$$

$$+2f(x_{n-1},y_0)+4f(x_{n-1},y_1)+\ldots+4f(x_{n-1},y_{m-1})+2f(x_{n-1},y_m)+$$

$$\left.+f(x_n,y_0)+2f(x_n,y_1)+\ldots+2f(x_n,y_{m-1})+f(x_n,y_m)\right],$$

kus h on sammupikkus $[a;b]$ ning τ on sammupikkus $[c;d.]$ Ligikaudsel arvutamisel on vaja leida funktsiooni väärtus $(n+1)(m+1)$ sõlmes.

Kasutades kaks korda trapetsvalemit, saame ligikaudse valemi

$$\int_D\int f(x,y)dxdy \approx$$

$$\approx \frac{h\tau}{4}\left[f(x_0,y_0)+2f(x_0,y_1)+\ldots+2f(x_0,y_{m-1})+f(x_0,y_m)+\right.$$

$$+2f(x_1,y_0)+4f(x_1,y_1)+\ldots+4f(x_1,y_{m-1})+2f(x_1,y_m)+\ldots+$$

$$+2f(x_{n-1},y_0)+4f(x_{n-1},y_1)+\ldots+4f(x_{n-1},y_{m-1})+2f(x_{n-1},y_m)+$$

$$\left.+f(x_n,y_0)+2f(x_n,y_1)+\ldots+2f(x_n,y_{m-1})+f(x_n,y_m)\right],$$

kus h on sammupikkus $[a;b]$ ning τ on sammupikkus $[c;d.]$ Ligikaudsel arvutamisel on vaja leida funktsiooni väärtus $(n+1)(m+1)$ sõlmes.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk $(n+1)^N$ sõlmes.
Olgu piirkond D $N-$mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega. Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväärtuse saab leida

$$Ef(x) = \int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2, \dots \widetilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk $(n+1)^N$ sõlmes.
Olgu piirkond D $N-$mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega. Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväärtuse saab leida

$$Ef(x) = \int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2, \dots \widetilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk $(n+1)^N$ sõlmes.

Olgu piirkond D $N-$mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega. Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväärtuse saab leida

$$Ef(x) = \int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2, \dots \widetilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk $(n+1)^N$ sõlmes.
Olgu piirkond D $N-$mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega. Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväärtuse saab leida

$$Ef(x) = \int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2, \dots \widetilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk $(n+1)^N$ sõlmes.
Olgu piirkond D $N-$mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega. Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväärtuse saab leida

$$Ef(x) = \int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2, \dots \widetilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk $(n+1)^N$ sõlmes.
Olgu piirkond D $N-$mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.
Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväärtuse saab leida

$$Ef(x) = \int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2, \dots \widetilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk $(n+1)^N$ sõlmes.
Olgu piirkond D $N-$mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.
Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväärtuse saab leida

$$Ef(x) = \int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2, \dots \widetilde{X}^n$.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk $(n+1)^N$ sõlmes.
Olgu piirkond D $N-$mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.
Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväärtuse saab leida

$$Ef(x) = \int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2, \dots \widetilde{X}^n$.

Suuruse $f(x)$ statistiline keskväärtus

$$E_{stat} f(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{X}^i).$$

Kui keskväärtus asendada statistilise keskväärtusega, siis

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{X}^i).$$

Suuruse $f(x)$ statistiline keskväärtus

$$E_{stat} f(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{X}^i).$$

Kui keskväärtus asendada statistilise keskväärtusega, siis

$$\int\int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{X}^i).$$

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.

Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku. Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit harilikuks diferentsiaalvõrrandiks (HDV). Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks (ODV).

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.

Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku. Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit harilikuks diferentsiaalvõrrandiks (HDV). Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks (ODV).

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.

Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku. Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit harilikuks diferentsiaalvõrrandiks (HDV). Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks (ODV).

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.

Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku. Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit harilikuks diferentsiaalvõrrandiks (HDV). Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks (ODV).

1. järku HDV **üldkuju** on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0,$$

kus $F(x; u; v)$ on kolme muutuja funktsioon.

1. järku HDV **normaalkuju** järgmine:

$$u' = f(x, u),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.

n. järku HDV üldkuju ja normaalkuju on vastavalt

$$F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0$$

ja

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}),$$

kus F ja f on vastavalt $n+2-$ ja $n+1-$muutuja funktsioonid.

1. järku HDV **üldkuju** on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0,$$

kus $F(x; u; v)$ on kolme muutuja funktsioon.
1. järku HDV **normaalkuju** järgmine:

$$u' = f(x, u),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.
n. järku HDV üldkuju ja normaalkuju on vastavalt

$$F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0$$

ja

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}),$$

kus F ja f on vastavalt $n+2-$ ja $n+1-$muutuja funktsioonid.

1. järku HDV **üldkuju** on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0,$$

kus $F(x; u; v)$ on kolme muutuja funktsioon.
1. järku HDV **normaalkuju** järgmine:

$$u' = f(x, u),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.
n. järku HDV üldkuju ja normaalkuju on vastavalt

$$F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0$$

ja

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}),$$

kus F ja f on vastavalt $n+2-$ ja $n+1-$muutuja funktsioonid.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid. Üldiselt $n-$järku võrrandi lahend sõltub n konstandist. $n-$järku HDV üldlahendiks nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. Erilahendiks nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel. Diferentsiaalvõrrandi singulaarseks lahendiks nimetatakse lahendit, mis ei ole saadav üldlahendist konstantide fikseerimise teel.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid. Üldiselt $n-$järku võrrandi lahend sõltub n konstandist. $n-$järku HDV üldlahendiks nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. Erilahendiks nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel. Diferentsiaalvõrrandi singulaarseks lahendiks nimetatakse lahendit, mis ei ole saadav üldlahendist konstantide fikseerimise teel.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid. Üldiselt $n-$järku võrrandi lahend sõltub n konstandist. $n-$järku HDV üldlahendiks nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. Erilahendiks nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel. Diferentsiaalvõrrandi singulaarseks lahendiks nimetatakse lahendit, mis ei ole saadav üldlahendist konstantide fikseerimise teel.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid. Üldiselt $n-$järku võrrandi lahend sõltub n konstandist. $n-$järku HDV üldlahendiks nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. Erilahendiks nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel. Diferentsiaalvõrrandi singulaarseks lahendiks nimetatakse lahendit, mis ei ole saadav üldlahendist konstantide fikseerimise teel.

Vaatleme normaalkujulist $n-$järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub n parameetrist $C_1, \ldots, C_n$, st omab n vabadusastet. Erilahendi määramiseks on vaja järelikult lisada sellele võrrandile n lisatingimust.

$$\begin{cases} u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}), \\ u(x_0) = u_0^0, \\ u^{(1)}(x_0) = u_0^1, \\ \ldots \\ u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{n-1} \end{cases}$$

Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks $n-$järku HDV-le. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.
Esineb ka ülesandeid, kus lisatingimused konstantide määramiseks on antud mitmes punktis. Sellisel juhul räägitakse rajaülesandest.

Vaatleme normaalkujulist $n-$järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub n parameetrist $C_1, \ldots, C_n$, st omab n vabadusastet. Erilahendi määramiseks on vaja järelikult lisada sellele võrrandile n lisatingimust.

$$\begin{cases} u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}), \\ u(x_0) = u_0^0, \\ u^{(1)}(x_0) = u_0^1, \\ \ldots \\ u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{n-1} \end{cases}$$

Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks $n-$järku HDV-le. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.

Esineb ka ülesandeid, kus lisatingimused konstantide määramiseks on antud mitmes punktis. Sellisel juhul räägitakse rajaülesandest.

Vaatleme normaalkujulist $n-$järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub n parameetrist $C_1, \ldots, C_n$, st omab n vabadusastet. Erilahendi määramiseks on vaja järelikult lisada sellele võrrandile n lisatingimust.

$$\begin{cases} u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}), \\ u(x_0) = u_0^0, \\ u^{(1)}(x_0) = u_0^1, \\ \ldots \\ u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{n-1} \end{cases}$$

Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks $n-$järku HDV-le. Cauchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.
Esineb ka ülesandeid, kus lisatingimused konstantide määramiseks on antud mitmes punktis. Sellisel juhul räägitakse rajaülesandest.

Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja u_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathrm{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve $u_1, u_2, u_3, \ldots$ nii, et $u_i \approx u(x_i)$.

Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja u_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathbb{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve $u_1, u_2, u_3, \ldots$ nii, et $u_i \approx u(x_i)$.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.

Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Teoreem

Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud $u_1, u_2, \ldots, u_{i+1}$ korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \ldots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1} - x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Teoreem

Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud $u_1, u_2, \ldots, u_{i+1}$ korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \le C_i max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \ldots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1} - x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Teoreem

Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud $u_1, u_2, \ldots, u_{i+1}$ korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \ldots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1} - x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \dots$.
Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Teoreem

Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$ korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \dots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1} - x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)\right).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)\right).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)\right).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)\right).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)\right).$$

Meetod on teist järku.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)\right).$$

Meetod on teist järku.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.
Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.
Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.
Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.
Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.

Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.
Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.
Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.
Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.
Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.
Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.

Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.

Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1})-u_{i+1}=u(x_{i+1})-u_i-c_1hf(x_i,u_i)-c_2hf\left(x_i+\alpha h,u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Kui $u_i=u(x_i)$, siis

$$u(x_{i+1})-u_{i+1}=$$

$$=u(x_{i+1})-u(x_i)-c_1hf(x_i,u_i)-c_2hf\left(x_i+\alpha h,u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Siis

$$u(x_{i+1})-u_{i+1}=$$

$$=u(x_i)+hf+\frac{h^2}{2}(f_x+f_uf)+O(h^3)-$$

$$-u(x_i)-c_1hf-c_2h[f+\alpha hf_x+\beta hff_u+O(h^2)]=$$

$$=h[1-c_1-c_2]f+h^2\left[\left(\frac{1}{2}-c_2\alpha\right)f_x+\left(\frac{1}{2}-c_2\beta\right)ff_u\right]+O(h^3).$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1})-u_{i+1} = u(x_{i+1})-u_i-c_1hf(x_i,u_i)-c_2hf\left(x_i+\alpha h, u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$

$$= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1hf(x_i,u_i) - c_2hf\left(x_i+\alpha h, u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$

$$= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_uf) + O(h^3) -$$

$$-u(x_i) - c_1hf - c_2h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] =$$

$$= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2\left[\left(\frac{1}{2} - c_2\alpha\right)f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2\beta\right)ff_u\right] + O(h^3).$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1})-u_{i+1}=u(x_{i+1})-u_i-c_1hf(x_i,u_i)-c_2hf\left(x_i+\alpha h,u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Kui $u_i=u(x_i)$, siis

$$u(x_{i+1})-u_{i+1}=$$

$$=u(x_{i+1})-u(x_i)-c_1hf(x_i,u_i)-c_2hf\left(x_i+\alpha h,u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Siis

$$u(x_{i+1})-u_{i+1}=$$

$$=u(x_i)+hf+\frac{h^2}{2}(f_x+f_uf)+O(h^3)-$$

$$-u(x_i)-c_1hf-c_2h[f+\alpha hf_x+\beta hff_u+O(h^2)]=$$

$$=h[1-c_1-c_2]f+h^2\left[\left(\frac{1}{2}-c_2\alpha\right)f_x+\left(\frac{1}{2}-c_2\beta\right)ff_u\right]+O(h^3).$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1})-u_{i+1} = u(x_{i+1})-u_i-c_1 hf(x_i,u_i)-c_2 hf\left(x_i+\alpha h, u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$

$$= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i,u_i) - c_2 hf\left(x_i+\alpha h, u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$

$$= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) -$$

$$- u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] =$$

$$= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2\left[\left(\frac{1}{2} - c_2\alpha\right)f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2\beta\right)ff_u\right] + O(h^3).$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1})-u_{i+1} = u(x_{i+1})-u_i-c_1hf(x_i,u_i)-c_2hf\left(x_i+\alpha h, u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$

$$= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1hf(x_i,u_i) - c_2hf\left(x_i+\alpha h, u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$

$$= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_uf) + O(h^3) -$$

$$-u(x_i) - c_1hf - c_2h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] =$$

$$= h[1-c_1-c_2]f + h^2\left[\left(\frac{1}{2}-c_2\alpha\right)f_x + \left(\frac{1}{2}-c_2\beta\right)ff_u\right] + O(h^3).$$

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1})-u_{i+1} = u(x_{i+1})-u_i-c_1 hf(x_i,u_i)-c_2 hf\left(x_i+\alpha h, u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$

$$= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i,u_i) - c_2 hf\left(x_i+\alpha h, u_i+\beta hf(x_i,u_i)\right).$$

Siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$

$$= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) -$$

$$-u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha hf_x + \beta hff_u + O(h^2)] =$$

$$= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2\left[\left(\frac{1}{2} - c_2\alpha\right) f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2\beta\right) ff_u\right] + O(h^3).$$

Kui kehtib

$$c_2 = 1 - c_1,$$
$$\alpha = \beta = \frac{1}{2(1 - c_1)},$$

siis on tegu II järku Runge-Kutta meetodiga.

$k-$järku Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 F_1 + c_2 F_2 + \ldots + c_k F_k,$$

kus

$$F_1 = hf(x_i, u_i),$$

$$F_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, u_i + \beta_{21} F_1),$$

$$F_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, u_i + \beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2),$$

$$\ldots$$

$$F_k = hf(x_i + \alpha_k h, u_i + \beta_{k1} F_1 + \beta_{k2} F_2 + \ldots + b_{k,k-1} F_{k-1}).$$

Adams-Bashforthi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \hat{\gamma_{k,j}} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Adams-Bashforthi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \hat{\gamma_{k,j}} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Adams-Bashforthi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \hat{\gamma_{k,j}} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$

Adams-Bashforthi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \hat{\gamma_{k,j}} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$